Universiteit
Antwerpen

Wiskundige Logica

Categorische logica en verzamelingen

Auteur: *Kobe Wullaert*

Begeleider: *Els Laenens*

Academiejaar 2018-2019

Abstract

Aan elke categorie kunnen we de interne taal associëren, dit is een type theorie dat in zekere zin betekenis geeft aan de categorie. Zo komt de interne taal van de categorie *Posets* met als objecten posets en morfismen de orderelatie-afbeeldingen juist overeen met de theorie van posets. Als we de interne taal van een topos bestuderen zal het blijken dat de taal overeenkomt met de intuïtionistische verzamelingenleer. De reden hiervoor is dat de subobject classifier van een topos een heyting-algebra vormt (want dit is een powerobject van het terminaal object) en het is algemeen gekend dat heyting algebras modellen vormen voor intuistionistische propositie logica (IPL). Een boolse topos zal dan weer juist als subobject classifier een boolse algebra hebben en dit is dan juist een model voor klassieke propositielogica. We zullen in een topos dan ook de quantifiers $(\forall, \exists)$ als adjoints interpreteren waardoor de interne taal een (intuistionistische) predicatenlogica representeert. Elke verzameling kan worden geschreven als $\{x|\phi(x)\}$ met ϕ een formule in de klassieke (of intuistionistische) logica. We zien dan dat voor elke formule we zo een object kunnen construeren als een pullback en dus vormt de theorie van een topos een settheorie die bovendien ook voldoet aan de axioma's van Zermelo-Fraenkel. We zullen dan het keuzeaxioma (voor de interne taal van de topos) kunnen karakteriseren door enkel te kijken naar eigenschappen van de categorie en niet meer expliciet naar de interne taal. Men kan dan een 2-waardige topos construeren waarvoor het interne keuzeaxioma niet geldt, wat dus in het bijzonder impliceert dat het keuzeaxioma onafhankelijk is van de axioma's van Zermelo-Fraenkel. Een voorbeeld van zo'n topos kan worden gevonden in [6].

Contents

Chapter 1

Categorie theorie

In dit hoofdstuk herhalen we de basis van categorie theorie die nodig is voor het vervolg van de thesis.

1.1 Motivatie categorie theorie

In de wiskunde zijn we altijd geïnteresseerd in het bestuderen van bepaalde structuren zoals groepen, ringen, topologische ruimten, enzovoort. Maar i.p.v. dat we de focus gaan leggen op de elementen in de structuur, gaan we nu de focus leggen op hoe deze structuren in verband staan met andere structuren, dus niet enkel de structuur zelf is belangrijk, maar ook de morfismen naar andere objecten (of nog algemener: hoe structuren in verband staan met elkaar).

1.2 Inleiding categorieën

Als we een structuur bestuderen zijn we geïnteresseerd in zowel voorbeelden van zo'n structuren, genaamd objecten, als de structuurbewarende afbeeldingen hiertussen, de morfismen:

Definition 1. *Een categorie $\mathcal{C}$ bestaat uit een collectie $Obj(\mathcal{C})$ objecten $A, B, C, ...$ en een collectie $Hom(\mathcal{C})$ van morfismen $f : X \to Y$ tussen objecten X, Y voor alle $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Bovendien is er een binaire operatie $\circ$, genaamd de compositie zodat:*

- *Eenheidselement:*

$$\forall X \in Obj(\mathcal{C}) \exists 1_X : X \to X : \forall f : A \to B : 1_B \circ f = f = f \circ 1_A,$$

  (dus 1_X is zoals de identiteitsafbeelding op X bezien als verzameling).

- *Associativiteit:*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Meestal zijn de morfismen (structuurbewarende) afbeeldingen en is de compositie tussen morfismen de compositie van functies, maar in algemene categorieën is dit zeker niet het geval. Alsook wordt vaak het symbool $\circ$ weggelaten, dus $g \circ f = gf$.

Remark 1. *Merk op dat we de notatie $A \in Obj(\mathcal{C})$ hebben gebruikt en verder ook $f \in Hom(A, B)$, maar deze collecties hoeven geen verzamelingen zijn (en dit is ook meestal niet het geval). Dit is puur om notationele redenen.*

Example 1.

- *De collectie van groepen (resp. ringen, vectorruimten (over k),...) vormt een categorie $[Grp]$ (resp. $[Rng], [Vct_k]$)met als objecten groepen (resp. ringen, vectorruimten,...) en als morfismen groepshomomorfismen (resp. ringhomomorfismen, lineaire afbeeldingen,...).*
- *De collectie van topologische ruimten vormt een categorie $[Top]$ met als objecten topologische ruimten en als morfismen de continue afbeeldingen.*
- *Stel $(G, +, 0)$ een groep, dan vormt G een categorie met 1 object $\hat{G}$ en voor elk element $a \in G$ correspondeert een morfisme $a : \hat{G} \to \hat{G} : b \mapsto a + b$.*
- *Stel $(X, \leq)$ een poset, dan vormt X een categorie met als objecten de elementen en $Hom(x, y)$ bevat 1 morfisme $x \to y$ als $x \leq y$ en is leeg anders.*
- *Stel $(X, \mathcal{T})$ een top. ruimte, dit vormt dan een categorie aangezien een topologische ruimte i.h.b een poset is t.o.v. de inclusie.*
- *Enzovoort...*

Net zoals bij verzamelingen zijn er 'speciale' objecten en morfismen:

Definition 2.

- *Een object T heet terminaal als $\forall X \in Obj(\mathcal{C}) : \exists! X \to T$.*
- *Een object I heet initieel als $\forall X \in Obj(\mathcal{C}) : \exists! I \to X$.*
- *Een morfisme $f : Y \to X$ is een monomorfisme als $\forall u, v : Z \to Y : fu = fv \implies u = v$.*
- *Een morfisme $f : X \to Y$ is een epimorfisme als $\forall u, v : Y \to Z : uf = vf \implies u = v$.*
- *Een morfisme $f : X \to Y$ is een isomorfisme als $\exists g : Y \to X : gf = Id_X, fg = Id_Y$.*

Indien er een isomorfisme bestaat tussen X en Y, dan zegt men dat X en Y isomorf zijn.

In $[Sets]$ komen voorgaande definities overeen met:

- Een terminaal object is een singleton.
- Het initieel object is de lege verzameling.

- Een monomorfisme is een injectieve afbeelding.
- Een epimorfisme is een surjectieve afbeelding.
- Een isomorfisme is een bijectieve afbeelding.

In het vervolg schrijven we **1** voor het terminaal object en **0** voor het initieel object.

Definition 3. *Een categorie heet klein als de collectie van objecten en collectie van morfismen verzamelingen zijn.*

1.3 Functoren

Vaak is het zo dat object in een categorie in 'verband' staat met een object in een andere categorie. Zo kunnen we bijvoorbeeld een afbeelding construeren $[Grp] \to [Set]$ die een groep mapt naar zijn onderlinge verzameling. Alsook zal deze afbeelding een afbeelding induceren die een groepmorfisme stuurt naar de (verzameling-theoretische) map. Een (structuurbewarende) afbeelding die objecten en morfismen van een categorie mapt naar een andere noemt men een functor:

Definition 4. *Stel $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ categorieën. Een functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ voldoet aan:*

- $A \in Obj(\mathcal{C}) \implies F(A) \in Obj(\mathcal{D})$.
- $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \implies F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$
- $F(1_A) = 1_{F(B)}$.
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Definition 5. *Stel $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functoren. Dan is een natuurlijk transformatie een collectie van morfismen $\{\nu_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in Obj(\mathcal{C})}$ zodat voor elk morfisme $f : X \to Y$ volgend diagram commuteert:*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow{\nu_X} & & \downarrow{\nu_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Definition 6. *Stel $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categoriëen met $\mathcal{C}$ klein. De categorie met als objecten de functoren van $\mathcal{C}$ naar $\mathcal{D}$ en natuurlijke transformaties wordt genoteerd door $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ en wordt een functor categorie genoemd.*

Definition 7. *Stel $\mathcal{C}$ een categorie. De opposite categorie van $\mathcal{C}$, genoteerd $\mathcal{C}^{op}$, heeft als objecten de objecten van $\mathcal{C}$ en voor elk morfisme $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ is er een uniek morfisme $g : Y \to X \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y, X)$.*

De opposite categorie heeft dus dezelfde objecten maar de pijlen (morfismen) zijn omgedraaid.

Definition 8. *Een preschoof is een functor $\mathcal{C}^{op} \to [Sets]$.*

1.4 Limieten van diagrammen

Constructies zoals het cartesisch product, directe som, enzovoort, worden in vele structuren zoals groepen, topologische ruimten, ... gedefinieerd. Ondanks dat de definities hiervan in zekere zin echt van de structuur afhangen, voldoen deze constructies aan dezelfde (karakteriserende) eigenschap. Deze constructies zijn speciaal door de manier waarop ze juist met andere objecten in verband staan. Zo is het cartesisch product een object dat projecties heeft, maar bovendien zal elk ander object dat projecties heeft, factoriseren door het product. Dit soort eigenschap van een object noemt men een **universele eigenschap**. Om deze constructies in te voeren maken we gebruik van limieten en dit wordt dan weer gedefinieerd a.d.h.v. diagrammen.
Merk op dat elke categorie kan worden bezien als een (oneindige) gerichte graaf met als nodes de objecten en vertices de morfismen. Een diagram, informeel, is dan een deelgraaf van de volledige graaf:

Definition 9. *Een diagram (van type J) in een categorie $\mathcal{C}$ is een functor $D : J \to \mathcal{C}$.*

Merk op dat er geen eisen liggen op J, maar meestal is dit een 'eindige' categorie, de objecten en Hom-sets zijn eindige verzamelingen (de graaf kan dus werkelijk worden getekend).

Example 2. *Neem $(X, \leq)$ een poset en $Poset(X)$ de corresponderende categorie. Dan komt een diagram in $Poset(X)$ (die alles bevat) juist overeen met het Hasse diagram van de poset.*

We zeggen dat een diagram commuteert als elk pad (van morfismen) gelijk is.
Een diagram is gemakkelijk om visueel verbanden tussen objecten voor te stellen, maar het wordt ook gebruikt om o.a. nieuwe constructies (op objecten) te definiëren a.d.h.v. universele eigenschappen. Zo is het cartesisch product $X_1 \times X_2$ van verzamelingen X_1 en X_2 de unieke verzameling zodat als $f_1 : Y \to X_1$ en $f_2 : Y \to X_2$ functies zijn, dan bestaat er een unieke $f : Y \to X_1 \times X_2$ zodat $f_1 = \pi_1 \circ f$ en $f_2 = \pi_2 \circ f$ met π_i de projectie van $X_1 \times X_2$ op X_i. In andere woorden commuteert volgend diagram:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& X_1 \times X_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & X_1 \\
& X_2 &
\end{tikzcd}$$

We definiëren dus het product van objecten $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ als volgt:

Definition 10. *Het product van X_1 en X_2 is een object, genoteerd door $X_1 \times X_2$ samen met morfismen $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ voor $i = 1, 2$ zodat dit voldoet aan de universele eigenschap dat voor elk object Y en morfismen $f_i : Y \to X_i$ voor $i = 1, 2$, er bestaat een uniek morfisme $f : Y \times X_1 \times X_2$ zodat voorgaand diagram commuteert.*

Op analoge manier kunnen we de pullback en equaliser definiëren als volgt: Een pullback is een veralgemening van een product:

Definition 11. *Stel $f_i : X_i \to Z$ morfismen, dan is de pullback het object Y met morfismen $q_i : Y \to X_i$ met de universele eigenschap dat als $p_i : W \to X_i$ morfismen zijn, dan bestaat er een unieke $f : W \to Y$ zodat volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& Y \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "f_2"] & \boldsymbol{Z}
\end{tikzcd}$$

Men noemt de pullback soms ook het fibered product en het wordt genoteerd als $X_1 \times_Z X_2$. Dus merk op dat een product een pullback is met $Z = \mathbf{1}$ het terminaal object, i.e. $X_1 \times X_2 = X_1 \times_{\mathbf{1}} X_2$. Dus een categorie met pullbacks en terminaal object bevat producten.
Stel $f, g : X \to Y$ afbeeldingen (in $[Sets]$), dan is de equaliser E van f en g de verzameling van elementen die samenvallen op de afbeelding, i.e. $E = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$. Als we dit veralgemenen naar categorische termen krijgen we:

Definition 12. *Stel $f, g : X \to Y$ morfismen. De equaliser van f en g is een object E en een morfisme $eq : E \to X$ zodat als $h : D \to X$ een morfisme is, dan bestaat er een unieke $\tilde{h} : D \to E$ zodat volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "eq"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
D \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[ur, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Merk op dat de nieuwe objecten geconstrueerd bij de pullback, product, ..., (in zekere zin) dezelfde structuur hebben. Formeel noemen we deze objecten (met corresponderende projectie morfismen) directe limieten (of gewoon limieten) van de bijhorende diagrammen. Direct betekent dat we morfismen hebben van het nieuwe object naar de originele objecten. De inverse limiet (of colimiet) van een diagram is een object dat zich gedraagt zoals een directe limiet, maar nu hebben we morfismen van de originele objecten naar het nieuwe object. Een voorbeeld hiervan is het coproduct:

Definition 13. *Het coproduct van X_1 en X_2 is het object $X_1 \sqcup X_2$ met morfismen $j_i : X_i \to X_1 \sqcup X_2$, voor $i = 1, 2$, zodat deze voldoet aan de universele eigenschap dat als er morfismen $f_i : X_i \to Y$ bestaan voor $i = 1, 2$, dan is er een uniek morfisme $f : X_1 \sqcup X_2 \to Y$ zodat volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "j_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\ & X_1 \sqcup X_2 \arrow[d, dashed, "f"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Zoals de notatie aangeeft is het coproduct in $[Sets]$ de disjuncte unie (of directe som).
We definiëren dan nu limieten en colimieten, we introduceren eerst een cone van een diagram. Merk op dat bij het definiëren van pullbacks en equalisers er niet enkel het object van belang was, maar (net zoals altijd in categorietheorie) dat er ook morfismen zijn, deze informatie noemt men een cone:

Definition 14. *Een cone van een diagram $D : J \to \mathcal{C}$ is een object $C \in Obj(\mathcal{C})$, genaamd de vertex, samen met een collectie morfismen $C_i : C \to D(i)$, voor iedere $i \in Obj(J)$ zodat voor elk morfisme $f : D(i) \to D(j)$, volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "C_i"] \arrow[d, "C_j"] & D(i) \arrow[dl, "f"] \\ D(j) & \end{tikzcd}$$

Definition 15. *De limiet van een diagram $D : J \to \mathcal{C}$ is een cone met vertex C zodat voor elke andere cone met vertex $\tilde{C}$ er een uniek morfisme $h : \tilde{C} \to C$ bestaat zodat volgend diagram commuteert (voor alle $i \in Obj(J)$):*

$$\begin{tikzcd} \tilde{C} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{C}_i"'] & C \arrow[dl, "C_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

Merk op dat een limiet uniek is op isomorfisme na en dat niet elke categorie limieten heeft. Zo bestaan bijvoorbeeld in de categorie van lichamen (of velden) met ringhomomorfismen geen producten, want het product van 2 lichamen is altijd een ring die nooit een lichaam is.
Een colimiet kunnen we analoog definiëren, maar we kunnen dit gemakkelijker definiëren als een limiet in de opposite categorie $\mathcal{C}^{op}$.
Dus a.d.h.v. limieten kunnen we een pullback en equaliser definiëren als de limiet van volgende diagrammen:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & \mathbf{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Als limieten altijd bestaan zeggen we dat de categorie limieten heeft:

Definition 16. *Een categorie heeft alle limieten als de limiet van elk diagram bestaat en heeft respectievelijk eindige limieten als de limiet van een eindig diagram bestaat.*

1.5 Powerobjecten

In deze sectie introduceren we de notie van powerobjecten in een categorie. Dit is een veralgemening van de powerset $\mathbb{P}(X)$ van een verzameling X.
Merk op dat de powerset van X een *is element van* verzameling definiëert:

$$\in_X = \{(x, A) | x \in A \subseteq X\} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}(X).$$

Om de universele eigenschap van een powerset te bepalen zullen we dus zien wat er gebeurt als er een andere verzameling Y is met een afbeelding $r \hookrightarrow X \times Y$. Aangezien dus $r \subseteq X \times Y$ is, heeft deze een karakteristiek morfisme $\chi_r : X \times Y \to \{0,1\}$. Aangezien $Hom(X \times Y, \{0,1\}) \cong Hom(Y, \{0,1\}^X)$ is dit dus equivalent met een afbeelding $Y \to \{0,1\}^X$, maar $\{0,1\}^X \cong \mathbb{P}(X)$. Dus gegeven $r \hookrightarrow X \times Y$, is dit equivalent met een afbeelding $g : Y \to \mathbb{P}(X)$ en induceert dit een afbeelding $(Id_X, g) : X \times Y \to X \times \mathbb{P}(X)$, i.e. we hebben volgend diagram:

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, hook] & \in_X \arrow[d, hook] \\ X \times Y \arrow[r, "(Id_X \times g)"] & X \times \mathbb{P}(X) \end{tikzcd}$$

Merk op dat elke afbeelding $g : Y \to \mathbb{P}(X)$ een relatie $R \hookrightarrow Y \times X$ definiëert met $(a, b) \in R \iff a \in g(b)$. Dus $(a, b) \in R \iff (a, g(b)) \in \in_X$.
Aangezien χ_r de karakteristieke functie is horend bij r hebben we

$$g : Y \to \mathbb{P}(X) : y \mapsto \{x \in X | (x, y) \in r\}.$$

Hieruit volgt dus dat

$$(a, g(b)) \in \in_X \iff (a, b) \in R \iff a \in g(b) = \{x | (x, b) \in r\} \iff (a, b) \in r.$$

Dus als we $(Id_X \times g)$ restricteren tot r, krijgen we een afbeelding $r \to \in_X$ en hebben we hebben dus dat

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, "(Id_X \times g)|_r"] \arrow[d, hook] & \in_X \arrow[d, hook] \\ X \times Y \arrow[r, "(Id_X \times g)"] & X \times \mathbb{P}(X) \end{tikzcd}$$

commuteert en dit is bovendien een pullback diagram, we concluderen dus:

Definition 17. *Stel $\mathcal{C}$ een categorie met eindige limieten. Het powerobject van een object $C \in Obj(\mathcal{C})$ is een object $\mathbb{P}C$ samen met een monomorfisme $\in_C \hookrightarrow C \times \mathbb{P}C$ dat universeel is in de volgende zin:*
Stel $D \in Obj(\mathcal{C})$ een object en $E \hookrightarrow C \times D$ een monomorfisme, dan bestaat er een uniek morfisme $\mathcal{X}_E : D \to \mathbb{P}C$ zodat volgend diagram een pullback diagram is:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & \in_C \arrow[d] \\ C \times D \arrow[r, "Id_C \times \mathcal{X}_R"] & C \times \mathbb{P}C \end{tikzcd}$$

1.6 Elementaire topoi

Definition 18. *Een (elementaire) topos is een categorie met eindige limieten zodat voor elk object het powerobject bestaat.*

Remark 2. *We schrijven een topos voor een elementaire topos en het meervoud van een topos is topoi.*

De categorie van verzamelingen $[Sets]$ is per constructie een voorbeeld van een topos, andere voorbeelden van topoi zijn deelcategorieëen van $[Sets]$ zoals $[FinSets]$, de categorie van eindige verzamelingen met afbeeldingen, de categorie van groep verzamelingen over een groep G, deze bevat als objecten de groepverzamelingen, i.e. verzamelingen X zodat G een groepactie heeft op X en met morfismen $f : X \to Y$ zodat $\forall g \in G \forall x \in X : f(gx) = gf(x)$ geldt. Een topos die geen deelcategorie is van $[Sets]$ is bijvoorbeeld de categorie van preschoven met als morfismen de natuurlijke transformaties.

1.7 Cartesisch gesloten categoriëen

Als X en Y verzamelingen zijn, dan is de collectie van functies

$$X^Y = \{f : Y \to X\}$$

opnieuw een verzameling. Merk op dat we aan deze verzameling een evaluatie functie $ev : X^Y \times Y \to X : (f, x) \mapsto f(x)$ kunnen associëren. Stel dus dat er een andere verzameling Z en functie $e : Z \times X \to Y$ bestaat, dan is dit equivalent met een functie $Z \to X^Y : z \mapsto e(z, -)$:

Definition 19. *Stel $\mathcal{C}$ een categorie met eindige producten en $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Een exponentieel object van Y met X is een object X^Y samen met een morfisme $ev : X^Y \times Y \to X$, genaamd de evaluatiemap, die universeel is in de volgende zin:*
Stel Z een object en een morfisme $e : Z \times Y \to X$, dan bestaat er een uniek morfisme $u : Z \to X^Y$ zodat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} Z \times Y \arrow[r, "u \times Id_Y"] \arrow[dr, "e"'] & X^Y \times Y \arrow[d, "ev"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definition 20. *Een categorie is cartesisch gesloten als eindige producten en exponentiële objecten van alle objecten bestaan.*

Merk op dat aangezien het terminaal object 1 het lege product is, dit dan ook bestaat.

Theorem 1. *Een topos is cartesisch gesloten.*

1.8 Subobjecten en subobject classifiers

In deze sectie veralgemenen we de notie van deelverzamelingen en hun corresponderende karakteristieke morfismen. Merk op dat als $A \subset X$ een deelverzameling is, dat we dan een injectie $A \hookrightarrow X$ hebben. Maar elke injectie $f : Y \to X$ induceert ook een deelverzameling $f(Y) \subseteq X$ en aangezien we enkel geïnteresseerd zijn in objecten op isomorfie na correspondeert een deelverzameling met een equivalentieklassen van injectieve afbeeldingen:

Definition 21. *Een subobject van een object $X \in \mathcal{C}$ is een isomorfie klasse van monomorfismen in X, waarbij $f : Y \to X$ en $g : Z \to X$ isomorf zijn als er een isomorfisme $h : Y \to Z$ bestaat zodat volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

De collectie van subobjecten van X wordt genoteerd door $Sub(X)$ en i.p.v. te schrijven $Y \to X \in Sub(X)$ zullen we voor het gemak schrijven $Y \in Sub(X)$.

De nederlandse vertaling van subobject is deelobject, beide termen zullen in het vervolg worden gebruikt.
In $[Sets]$ kan elke deelverzameling $U \subset X$ worden gekarakteriseerd door de karakteristieke functie $\mathcal{X}_U : X \to \{0, 1\}$ zodat $\mathcal{X}_U(x) = 1$ als $x \in U$ en is 0 anders. Stel nu $true : \mathbf{1} \to \{0, 1\} : \star \mapsto 1$. Aangezien $U \subset X$ overeen komt met een injectie $m : U \to X$ en U de grootste verzameling is waarvoor $\mathcal{X}_U$ als beeld 1 heeft, geldt dat volgend diagram een pullbackdiagram is:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\mathcal{X}_U"] & \Omega \end{tikzcd}$$

De conclusie is dus dat we deelverzamelingen kunnen definiëren d.m.v. de verzameling $\Omega = \{0, 1\}$. De map $true : \mathbf{1} \to \Omega$ noemt men de subobject classifier:

Definition 22. *Een subobject classifier is een monic true* : $\mathbf{1} \to \Omega$ *zodat voor alle monische afbeeldingen* $S \rightarrowtail X$ *er een unieke afbeelding* $\mathcal{X} : X \to \Omega$ *bestaat zodat volgend diagram een pullback diagram is:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\mathcal{X}"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Merk op dat in $[Sets]$ geldt dat $\mathbb{P}(X) = \{0,1\}^X = \Omega^X$:

Theorem 2. *Stel* $\mathcal{C}$ *een cartesisch gesloten categorie (CCC) met subobject classifier* $1 \to \Omega$, *dan bestaat het powerobject voor elk object* X *en wordt gegeven door* Ω^X.

1.9 Interne Heyting algebras

Vaak komt het voor dat een object in een categorie ook overeenkomt met een object in een andere categorie, zo is bijvoorbeeld een topologische groep een groep waarop de onderliggende verzameling een topologie heeft en zodat de groepoperatie continu is. Een interne poset is een object L in een categorie dat een binaire operatie $\leq : L \times L \to \Omega$ heeft die voldoet aan de axioma's van een orderelatie:

$$\begin{aligned} & a \leq a \\ a \leq b, b \leq c \implies & a \leq c \\ a \leq b, b \leq a \implies & a = b \end{aligned}$$

Deze axioma's kunnen we niet direct definiëren in een categorie, maar merk op dat we deze kunnen karakteriseren a.d.h.v. morfismen. Om dit te doen zullen we werken met $\leq$ als deelobject van $L \times L$ (dus als een relatie). De reflexiviteit is dus equivalent met te zeggen dat de diagonaal Δ een deelobject vormt van $\leq$, dus Δ factoriseert door e, i.e. er bestaat een $h : L \to \leq$ zodat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, dashed, "h"] & L \times L \\ & \leq \arrow[u] \end{tikzcd}$$

De anti-symmetrie eigenschap $a \leq b, b \leq a \implies a = b$ is equivalent met te zeggen dat $\leq \cap \geq \subseteq \Delta$ geldt. De relatie $\geq$ kunnen we definiëren als het deelobject gegeven door $flip \circ e$ waarbij $e : \leq \hookrightarrow L \times L$, het deelobject corresponderend met de $\leq$ relatie en $flip : L \times L \to L \times L : (a, b) \mapsto (b, a)$ het morfisme dat (informeel) de elementjes van plaats verwisselt. Het morfisme $flip$ is gekarakteriseerd door de eigenschap dat $\pi_i \circ flip = \pi_j$ met $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Herinner dat de doorsnede gedefinieerd is als de pullback van de inclusie maps en zeggen dat de intersectie bevat is in de diagonaal, is dus zeggen dat volgend diagram een pullback diagram is en dat er een morfisme $h : \leq \cap \geq \to L$ bestaat zodat het diagram commuteert:

$$
\begin{tikzcd}
\leq \cap \geq \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \leq \arrow[dd, "e"] \\
& L \arrow[dr, "\Delta"] & \\
\geq \arrow[rr] & & L \times L
\end{tikzcd}
$$

Om de transitiviteit te bekomen introduceren we de verzameling $C = \{(x, y, z) \in L^3 | x \leq y, y \leq z\}$. Als aan de transitiviteit voldaan is, moet deze verzameling een deel zijn van $\leq$. Definieer nu volgende afbeeldingen:

$$
\begin{aligned}
\pi_{1,2} &: L^3 \to L^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y), \\
\pi_{2,3} &: L^3 \to L^2 : (x, y, z) \mapsto (y, z),
\end{aligned}
$$

dan hebben we:

$$
C = \{(x, y, z) \in L^3 | (\pi_1 \circ e \circ \pi_{2,3})(x, y, z) = (\pi_2 \circ e \circ \pi_{1,2})(x, y, z), x \leq y, y \leq z\}
$$

Dan is per definitie volgend diagram een pullback diagram:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\pi_{2,3}"] \arrow[dd, "\pi_{1,2}"] & & \leq \arrow[d, "e"] \\
& & L \times L \arrow[d, "\pi_1"] \\
\leq \arrow[r, "e"] & L \times L \arrow[r, "\pi_2"] & L
\end{tikzcd}
$$

Neem $\mathcal{C}$ een categorie met eindige limieten.

Definition 23. *Een interne poset in een categorie $\mathcal{C}$, met eindige limieten, is een object L dat voldoet aan de 3 bovenstaande diagrammen.*

Herinner dat een tralie (met $0, 1$) een verzameling is waarbij het supremum $\vee$ en infimum $\wedge$ van elementen is gedefinieerd, deze voldoen aan de axioma's

$$
\begin{aligned}
x \vee x = x &= x \wedge x \\
1 \wedge x = x &= 0 \vee x \\
x \wedge (y \vee x) = x &= (x \wedge y) \vee x
\end{aligned}
$$

samen met de vereisten dat $\wedge$ en $\vee$ commutatief en associatief zijn. Deze definitie kunnen we ook uitdrukken in termen van de functies $\wedge, \vee : L \times L \to L$:

Definition 24. *Een interne tralie in $\mathcal{C}$ is een object $L \in Obj(\mathcal{C})$ met morfismen $\wedge, \vee : L \times L \to L$ die voldoet aan volgende eigenschappen:*

1. $\vee \circ \Delta = Id_L = \wedge \circ \Delta$
2. $\wedge \circ (Id_L, \top) = Id_L = \vee \circ (Id_L, \bot)$
3. $\wedge = \wedge \circ flip, \vee = \vee \circ flip$
4. $\wedge \circ (\wedge, Id_L) = \wedge \circ (Id_L, \wedge)$

Waarbij $\top : 1 \to L$ (resp. $\bot : 1 \to L$) het top element (resp. bottom element) is zodat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "id_L"] \arrow[d, "\cong"] & L \\ L \times 1 \arrow[r, "id_L \times \bot"] & L \times L \arrow[u, "\vee"'] \end{tikzcd}$$

resp.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "id_L"] \arrow[d, "\cong"] & L \\ L \times 1 \arrow[r, "id_L \times \top"] & L \times L \arrow[u, "\wedge"'] \end{tikzcd}$$

Remark 3. *Een interne tralie L definieert een interne poset door $\leq_L$ te definiëren als het subobject gegeven door de equaliser*

$$\leq_L \xrightarrow{e} L \times L \underset{\wedge}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} L$$

Herinner dat een Heyting-algebra een tralie L (met $0, 1$) is samen met een binaire operatie $\implies : L \times L \to L$ zodat

$$\begin{aligned} x \implies x &= 1 \\ x \wedge (x \implies y) &= x \wedge y \\ y \wedge (x \implies y) &= y \\ x \implies (y \wedge z) &= (x \implies y) \wedge (x \implies z) \end{aligned}$$

Deze 3 condities zijn equivalent met $x \wedge y \leq z \iff x \leq (y \implies z)$

Definition 25. *Een interne heyting algebra is een interne tralie L samen met een morfisme $\implies : L \times L \to L$ zodat voorgaande gelijkheden gelden (als morfismen).*

1.9.1 Orde op subobjecten

Herinner dat aan elke poset $(X, \leq)$, we de categorie $Poset(X, \leq)$ kunnen associëren en deze heeft de eigenschap dat $Hom(x, y)$ ten hoogste 1 element bevat (als $x \leq y$) en als zowel $Hom(x, y)$ als $Hom(y, x)$ niet leeg zijn, dan is $x = y$ (wegens anti-symmetrie). Een categorie noemt men een poset categorie indien deze 2 eigenschappen van de hom-sets gelden.

Theorem 3. *$Sub(X)$ vormt een poset categorie waarbij $f : Y \to X \leq g : Z \to X$ als er een morfisme $h : Y \to Z \in Sub(Z)$ bestaat zodat $f = gh$.*

Proof. Aangezien g monisch is, bestaat er hoogstens 1 zo'n h en h is monisch omdat f dit is. Dus tussen 2 isomorfieklassen bestaat er hoogstens 1 morfisme en als er morfismen $f \to g$ en $g \to f$ zijn, dan zijn deze isomorf en behoren deze in dezelfde isomorfieklasse. $\square$

De verzameling van deelobjecten $Sub(X)$ met $X \in Obj(\mathcal{E})$ heeft de structuur van een Heyting algebra, we zullen deze structuur nu expliciet construeren. De definities van het supremum, enzovoort halen we uit de motivatie van $[Sets]$.
Als eerst bekijken we de intersectie van verzamelingen $Y, Z \subseteq X$. Dit is de grootste deelverzameling van Y en Z. We hebben dus inclusie maps $Y \hookrightarrow X, Z \hookrightarrow X$ en als er een deel $W \subseteq X$ bestaat zodat $W \subseteq Y$ en $W \subseteq Z$ geldt, dan zullen de bijhoren inclusiemaps noodzakelijk factoriseren door $Y \cap Z$, i.e. $Y \cap Z$ is de pullback van $Y \hookrightarrow X$ en $Z \hookrightarrow X$:

Definition 26. *Stel $Y, Z \in Sub(X)$ subobjecten. De intersectie van Y met Z is het subobject $Y \cap Z$ zodat volgend diagram een pullback diagram is:*

$$\begin{tikzcd}
Y \cap Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Vooraleer we de unie van $Y, Z \subseteq X$ kunnen introduceren, zullen we eerst hun disjuncte unie introduceren. De reden hiervoor is dat we de unie $Y \cup Z$ kunnen schrijven als $Y \cup Z = \frac{Y \sqcup Z}{R}$ met R de equivalentie relatie gegeven als volgt: Stel $i_Y : Y \hookrightarrow X$ en $i_Z : Z \hookrightarrow X$ de inclusiemaps, dan zijn elementen $z \in Z$ en $y \in Y$ equivalent als

$$zRy \iff i_Z(z) = i_Y(y).$$

Deze karakterisatie van de unie is dan weer equivalent met te zeggen dat de geïnduceerde (niet noodzakelijk injectieve) afbeelding $Y \sqcup Z \to X$ als beeld de unie heeft.
We hebben dus een karakterisatie nodig van de begrippen *disjunctie unie* en *beeld*.
Stel $Y, Z \subset X$ deelverzamelingen, de disjuncte unie heeft dan afbeeldingen uitgaande van Y en Z, i.e. $f_Y : Y \rightarrowtail Y \sqcup Z, f_Z : Z \rightarrowtail Y \sqcup Z$. Merk op dat als we

afbeeldingen $g_Y : Y \to X$ en $g_Z : Z \to X$ hebben, dat deze dan een afbeelding $g : Y \sqcup Z \to X$ induceert:

$$g(x) = \begin{cases} g_Y(x) & , x \in Y \\ g_Z(x) & , x \in Z \end{cases}$$

En er geldt (per definitie van g) dat g_Z en g_Y factoriseren door g:

Definition 27. *Stel $Y, Z \in Sub(X)$ subobjecten. De disjuncte unie van Y met Z is het coproduct $Y \sqcup Z$, i.e.*

$$\begin{tikzcd}
Y \sqcup Z \arrow[rd] & Z \arrow[l] \arrow[d] \\
Y \arrow[u] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Merk op dat de disjuncte unie niet een deelobject hoeft te zijn (deze is noodzakelijk een mono).
Het beeld $f(X_1)$ van een functie $f : X_1 \to X_2$ is de verzameling $X_3 \subseteq X_2$ zodat $f(X_1) = X_3$. Dit is equivalent met te zeggen dat er een injectie $i : X_3 \hookrightarrow X_2$ bestaat zodat f gefactoriseerd kan worden door i, i.e. $f = i \circ j$ met $j : X_1 \to X_3$ een surjectieve afbeelding.

Definition 28. *Het beeld van $f \in Hom(X, Z)$ is een mono $m : X \hookrightarrow Y$ zodat f factoriseert door m en als f factoriseert door $n : X \hookrightarrow \tilde{Y}$, dan factoriseert m door n, i.e.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rd] & Y \arrow[r, hook, "m"] & Z \\
& \tilde{Y} \arrow[u, dashed, "\exists"] \arrow[ru, bend right, "\forall n"'] &
\end{tikzcd}$$

De factorisatie van een afbeelding als een surjectie gevolgd door een injectie bestaat altijd, in een topos is dit ook het geval:

Lemma 1. *Elk morfisme f heeft een beeld m en factoriseert als $f = me$ met e een epimorfisme.*

We komen dus nu tot de definitie van de unie van willekeurige deelobjecten:

Definition 29. *De unie van $Y, Z \in Sub(X)$ is het beeld van het morfisme $Y \sqcup Z \to X$.*

Dan komen we nu tot de definitie van de implicatie. Stel $S, T \in Sub(A)$ en definieer $S \implies T$ als de equaliser van

$$A \underset{\phi_S}{\overset{\phi_{S \cap T}}{\rightrightarrows}} \Omega$$

Stel $\phi_{S\cap T}$ (resp. ϕ_S) als het karakteristiek morfisme horende bij $S \cap T$ (resp. S). Dan gelden volgende equivalenties voor $\rho : R \hookrightarrow A$:

$$\begin{aligned} R \cap S \leq T &\iff R \cap S \leq R \cap S \cap T \\ &\iff R \cap S = R \cap S \cap T \\ &\iff \phi_S \circ \rho = \phi_{R\cap S} = \phi_{R\cap S\cap T} = \phi_{S\cap T} \circ \rho \\ &\iff R \leq (S \implies T) \end{aligned}$$

Definition 30. *Stel $S, T \in Sub(A)$, dan definiëren we $S \implies T \in Sub(A)$ zodat volgend diagram een equaliser diagram is:*

$$(S \implies T) \hookrightarrow A \underset{\phi_S}{\overset{\phi_{S\cap T}}{\rightrightarrows}} \Omega$$

In een Heyting-algebra kunnen we het (pseudo-)complement definiëren als $\neg x = (x \implies 0)$:

Definition 31. *Het pseudo-complement van $Y \in Sub(X)$ is $Y \implies 0$.*

1.9.2 Orde op subobject classifier

Op de subobjectclassifier Ω kunnen we de structuur van een Heyting-algebra plaatsen. In de literatuur wordt dit op verschillende manieren gedaan, de eerste is door aan te tonen dat op elk powerobject $\mathbb{P}X$ er een Heyting-algebra structuur kan worden geplaatst en dan vormt $\Omega = \mathbb{P}\mathbf{1}$ een Heyting-algebra. Equivalent kan de structuur concreet worden gegeven. Aangezien Ω in direct verband staat met de subobjecten kunnen we de operaties definiëren als karakteristieke morfismen. De bekomen definities zijn verkregen, zoals altijd, door te kijken naar het geval $\Omega = \{0, 1\}$.
Als top element nemen we $true : \mathbf{1} \to \Omega$, de subobject classifier en als bottom element nemen we deelobject $false : \mathbf{1} \to \Omega$ gegeven door het karakteristiek morfisme $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$.
Het infimum $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ wordt gegeven als deelobject met karakteristiek morfisme de diagonaal (op Ω) $\Delta : \Omega \to \Omega \times \Omega$. Het supremum $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$ wordt gegeven als de unie van de subobjecten horende bij de karakteristieke morfismen:

1. $true \times \mathbf{Id}_\Omega : \mathbf{1} \times \Omega \to \Omega \times \Omega$
2. $\mathbf{Id}_\Omega \times true : \Omega \times \mathbf{1} \to \Omega \times \Omega$

Als implicatie $\implies : \Omega \times \Omega \to \Omega$ nemen we het karakteristiek morfisme horende bij $\leq$, gegeven als de equaliser van $\wedge$ en π_1, i.e. volgend diagram is een equaliser diagram:

$$\leq \longrightarrow \Omega \times \Omega \underset{\pi_1}{\overset{\wedge}{\rightrightarrows}} \Omega$$

De negatie $\neg : \Omega \to \Omega$ is het deelobject gegeven met karakteristiek morfisme $false : \mathbf{1} \to \Omega$.

Remark 4. *Aangezien Ω een Heyting-algebra vormt, induceert deze een Heyting-algebra structuur op $Hom(X, \Omega)$, bijvoorbeeld voor $\phi \in Hom(X, \Omega)$ definiëren we $\neg\phi$ als de compositie van ϕ met de negatie operator op Ω en analoog voor de andere operaties. Het is een feit dat $Sub(X)$ en $Hom(X, \Omega)$ isomorfe heyting-algebras zijn.*

1.10 Slice categorieën

Zoals eerder vermeld hebben we een bijectie tussen $Hom(1, X)$ en X door x te sturen naar $1 \to X : * \mapsto x$. In plaats van enkel 1 element te beschouwen kunnen we een willekeurige functie $U \to X$ beschouwen en deze levert dan een deel van X (het beeld), dit kunnen we dus beschouwen als een *globaal element*. De slice categorie van een categorie $\mathcal{C}$ is een categorie die deze globale elementen (van een vast object) als objecten bevat:

Definition 32. *Stel $\mathcal{C}$ een categorie met $U \in Obj(\mathcal{C})$. Dan is de slice categorie van U, genoteerd $\mathcal{C}/U$, gedefinieerd als volgt:*
Een object is een morfisme $X \to U \in Hom(\mathcal{C})$. Een morfisme van $(f : X \to U) \to (g : Y \to U)$ is gegeven door een morfisme $h : X \to Y$ zodat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Theorem 4. *Stel $\mathcal{E}$ een topos en $U \in Obj(\mathcal{E})$, dan is $\mathcal{E}/U$ een topos.*

Het nut van slice topoi in deze paper wordt het localisatieprincipe genoemd, dit wordt geïntroduceerd in het hoofdstuk van de interne logica, dit principe zal een karakterisatie geven voor de waarheid van een formule m.b.v. de globale elementen van een topos, waardoor we enkel naar elementen moeten kijken (zoals we in het verzamelingtheoretisch geval doen).

1.11 Boolse topoi

Dat een topos bools is, zal ervoor zorgen (zie volgend hoofdstuk), dat zo'n topos een model is voor klassieke i.p.v. intuistionistische logica:

Definition 33. *Een topos $\mathcal{E}$ is bools als de interne Heyting algebra Ω een interne boolse algebra is.*

Theorem 5. *Voor een topos $\mathcal{E}$ zijn volgende equivalent:*

- *$\mathcal{E}$ bools*
- *$\neg\neg = 1_\Omega$ voor $\neg : \Omega \to \Omega$ de negatie operator*

- *Er is een isomorfisme* $\boldsymbol{1} \sqcup \boldsymbol{1} \to \Omega$ *gegeven door* $true : \boldsymbol{1} \to \Omega$ *en*

$$false = \neg \circ true : \boldsymbol{1}$$

Er zijn nog andere karakterisaties, maar deze karakterisaties geven mooi de link weer met de klassieke logica. Het bewijs van deze stelling is te vinden in o.a. [6].

Chapter 2

Intuistionistische logica

In dit hoofdstuk herhalen we de notie van de intuistionistische logica. We introduceren de notie van signaturen, dit is een wiskundig framework waarin wiskundige theorieën formeel kan worden gedefinieerd, dan worden de axiomas van de intuistionistische propositielogica gegeven en bekijken we (algebraïsche) modellen van deze theorie, genaamd de Heyting modellen.

2.1 Logica

2.1.1 Inleiding signaturen

In wiskunde bestuderen we structuren en de klassieke (verzamelingtheoretische) structuren worden ingevoerd d.m.v. een logica. De meest bestudeerde structuren zijn allemaal ingevoerd d.m.v. de klassieke predicatenlogica, maar er is bijvoorbeeld ook fuzzy topologie, dit is een theorie gedefinieerd a.d.h.v. fuzzy logica en set theory. Er zijn dus verschillende vormen logica, een algemene manier om een logica (of eender welke theorie) in te voeren is d.m.v. signaturen.
Een manier om een wiskundige theorie te definiëren kan dus gedaan worden aan de hand van signaturen. Vooraleer de definitie hiervan wordt ingevoerd, kijken we eerst naar een voorbeeld van een theorie, de theorie van een groep. Herinner volgende definitie:

Example 3. *Een groep* $(G, +)$ *bestaat uit een verzameling* G *met daarop een binaire operatie* $+ : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x + y$ *die voldoet aan:*

- *Associativiteit:* $\forall x, y, z \in G : (x + y) + z = x + (y + z)$
- *Eenheid:* $\exists 0 \in G : \forall x \in G : x + 0 = x = 0 + x$
- *Inverse:* $\forall x \in G : \exists y \in G : x + y = 0 = y + x$

We hebben dus een groep gedefinieerd a.d.h.v. logica, want we gebruiken o.a. quantifiers. Maar we kunnen ook een groep zonder een onderliggende logica *definiëren. We kunnen de axioma van de inverse vervangen door een equivalent statement. Het is vrij duidelijk dat de inverse een afbeelding definieert, stel dat de inverse van x wordt genoteerd door $-x$, dan definiëren we de afbeelding $- : G \to G : x \mapsto -x$. En merk op dat we een bijectie hebben tussen $G = Hom(1, G)$ (met 1 een singleton verzameling), dus een element x komt overeen met een functie $1 \to G : \cdot \mapsto x$. In het bijzonder kunnen we dus het element 0 zo definiëren en merk op dat $1 = G^0$, dus we hebben een afbeelding $0 : G^0 \to G$. Merk op dat $x + y$ eigenlijk $+(x, y)$ is, dus associtiviteit wordt geschreven als $+(+(x, y), z) = +(x, +(y, z))$. We kunnen dus associtiviteit uitdrukken door te zeggen dat volgend diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd}
G^3 \arrow[r, "+\times 1_G"] \arrow[d, "1_G\times +"'] & G^2 \arrow[d, "+"] \\
G^2 \arrow[r, "+"'] & G
\end{tikzcd}$$

Het axioma van de eenheid wordt uitgeschreven als $+(x, 0) = 1_G = +(0, x)$. Aangezien $G \cong G \times G^0$ en er een inbedding $G^0 \hookrightarrow G$ is, kunnen we deze eigenschap herschrijven zodat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
G \times G^0 \arrow[d, hook, "1_G\times 0"'] & G \arrow[l, "\cong"] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "1_G"] & G^0 \times G \arrow[d, hook, "0\times 1_G"] \\
G^2 \arrow[r, "+"] & G & G^2 \arrow[l, "+"]
\end{tikzcd}$$

Het inverse axioma zegt $+(x, -(x)) = 0 = +(-(x), x)$, dit is equivalent aan zeggen dat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "1_G\times -"] \arrow[d] & G^2 \arrow[d, "+"] & G \arrow[l, "-\times 1_G"] \arrow[d] \\
G^0 \arrow[r, "0"] & G & G^0 \arrow[l, "0"]
\end{tikzcd}$$

Voorgaand voorbeeld zegt dus in essentie dat een wiskundige theorie volledig kan worden uitgedrukt als functies en eigenschappen van deze functies. We hebben nu uiteindelijk wel maar naar 1 specifiek voorbeeld gekeken, er missen dus nog een aantal concepten. De enige elementen die van belang waren zaten in G, maar als we nu bijvoorbeeld naar een $\mathbb{K}$-vectorruimte V kijken hebben we het lichaam $\mathbb{K}$ nodig (bv. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dus nu zijn er 2 verschillende, onafhankelijke verzamelingen, maar deze hebben nog interplay, want scalaire vermenigvuldiging is een afbeelding $\mathbb{K} \times V \to V$ en aangezien $\mathbb{K}$ een lichaam is hebben we binaire operaties $+, *$, dit zijn afbeeldingen $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ en operaties $-, ()^{-1} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Wat we hieruit dus concluderen is dat er meerdere verzamelingen kunnen zijn. Verzamelingen kunnen we bijvoorbeeld inbedden, maar we willen dat ze geen direct verband hebben met elkaar (functies mogen dan weer wel), we voeren daarom het abstract concept van een 'type' in. In het voorbeeld van de groep is er maar 1 type, terwijl bij de vectorruimte er 2 types zijn. Als we zo'n types met afbeeldingen tussen types hebben (en de daarboven axioma's), dan noemt deze informatie een algebraische theorie, maar ik zal deze notatie niet gebruiken, aangezien in de omstandigheden waarmee wij zullen werken de theorien kunnen worden opgevat als een algebraische theorie, maar deze theorieen zijn eigenlijk niet algebraisch. Wat ik hiermee bedoel zal (hopelijk) verder nog duidelijk worden. Het ander belangrijk concept in wiskunde is de notie van een relatie. Een relatie R op een verzameling X is een deelverzameling $R \subset X^2$, maar een relatie kunnen we algemener definiëren op verzamelingen $X_1, ..., X_n$ zodat $R \subset X_1, ..., X_n$. Zo is bijvoorbeeld $x \in A$ met $A \subset X$ een relatie op X en $\mathbb{P}(X)$. En elke (klassieke) wiskundige theorie kunnen we dan definiëren aan de hand van types, functies en relaties. Deze informatie noemt men een signatuur:

Definition 34. *Een signatuur S bestaat uit:*

- *Een collectie types: $s, t, ...$*
- *Een collectie functiesymbolen: $f, g, ...$ Aan elk functiesymbool associeren we een natuurlijk getal $n \geq 1$ en types $s_1, ...s_n, t$, we noteren dan $f : s_1, ..., s_n \to t$.*
- *Een collectie relatiesymbolen: $R, S, ...$ Aan elk relatiesymbool associeren we een pariteit $n \geq 1$ en types $s_1, ..., s_n$, we noteren dan $R \subseteq s_1 \times ... \times s_n$.*

Voor elk type s zijn er (een oneindig) aantal variabelen variabelen $x, y, ...$ en we noteren $x : s$ om aan te duiden dat x een variabele is van type s.

Een signatuur komt vaak niet (expliciet) voor in een eerste logica cursus, maar dit geeft een krachtige manier om theorien te bestuderen, dit wordt bijvoorbeeld gebruikt in (categorische) universele algebra, dit is een tak in de wiskunde waarbij algebraische structuren meer algemeen worden bestudeerd. Alsook zien we dat we dan uiteindelijk gemakkelijk naar de taal van categorie theorie kunnen overschakelen aangezien we alle informatie van een theorie (dus structuur) kunnen uitdrukken a.d.h.v. afbeeldingen door elementen hierdoor te vervangen.

2.1.2 Formules en termen

Definition 35. *De termen horend bij S zijn recursief gedefinieerd als:*

- *Stel $x : s$, dan is x een term van type s.*
- *Stel $f : s_1 \times ...s_n \to t$ een functiesymbool en $t_1, ..., t_n$ termen met t_i van type s_i, dan is $f(t_1, ..., t_n)$ een term van type t.*

Als t een term is van type s, dan noteren we $t : s$.

Definition 36. *De formules horend bij S zijn recursief gedefinieerd als volgt:*

- *Stel $t_1 : s, t_2 : s$ termen, dan is $(t_1 = t_2)$ een formule.*

- *Stel $R \subseteq s_1 \times ... \times s_n$ een relatie en $t_1 : s_1, ..., t_n : s_n$ termen, dan is $R(t_1, ..., t_n)$ een formule.*
- *Als ϕ een formule is, dan is $\neg\phi$ een formule.*
- *Als ϕ, ψ formules zijn, dan zijn $\phi \wedge \psi, \phi \vee \psi$ en $\phi \implies \psi$ formules.*
- *Als ϕ een formule is met x een vrije variabele, dan zijn $\forall x\phi$ en $\exists x\phi$ formules.*

We noteren de verzameling van formules horend bij S als $Form(S)$. Een signatuur definieert dus de syntax van een formele taal, als we nu axioma's toelaten krijgen we een logica:

Definition 37. *Een gevolgrelatie op een signatuur is een relatie $\vdash \subseteq \mathbb{P}(Form(S)) \times Form(S)$. Het koppel $(S, \vdash)$ noemen we een logica.*

We zeggen dat een collectie formules Γ een formule ϕ bewijst als $\Gamma \vdash \phi$.
We kunnen dus een 'algemene' logica definiëren door basisaxioma's te definiëren en dan te kijken naar de theorie die gesloten is onder het nemen van bewijzen. Merk op dat we een formule ook als een term kunnen definiëren indien we een type Ω definiëren zodat deze waarheid representeert. Als we de interne logica van een topos introduceren zal dit dan ook zijn wat we doen. Dit is ook de reden waarom ik hiervoor heb vermeld dat ik de term algebraische theorie niet goed vind, want elke relatie kunnen we dan vervangen door een functie en dan is het dus niet meer een 'echte' algebraische theorie.

2.1.3 Propositielogica

Definition 38. *De intuistionistische propositie logica (IPC of IPL) is een gevolgrelatie gesloten onder volgende axioma's:*

$$\begin{aligned}
\vdash p \implies (q \implies p) \\
\vdash (p \implies (q \implies r)) \implies ((p \implies q) \implies (p \implies r)) \\
\vdash p \wedge q \implies p \\
\vdash p \wedge q \implies q \\
\vdash p \implies (q \implies (p \wedge q)) \\
\vdash p \implies p \vee q \\
\vdash q \implies p \vee q \\
\vdash (p \implies q) \implies ((r \implies q) \implies (p \vee r \implies q)) \\
\vdash (p \implies q) \implies ((p \implies \neg q) \implies \neg p) \\
\vdash \neg p \implies (p \implies q)
\end{aligned}$$

samen met de inferentie regel modus ponens: als $\vdash p$ en $\vdash p \implies q$ gelden, dan geldt q.

2.2 Heyting modellen

We zullen nu aantonen dat we aan elke intuistionistische propositielogica een Heyting algebra kunnen associeren, i.e. Heyting algebra's vormen modellen voor een propositielogica.
Als eerst tonen we aan dat elke Heyting algebra voldoet aan de axioma's van IPC:

Theorem 6. *Stel H een Heyting-algebra en neem $a, b, c \in H$, dan geldt:*

$$\begin{aligned}
a &\leq (b \implies a) \\
(a \implies (b \implies c)) &\leq ((a \implies b) \implies (a \implies c)) \\
a &\leq (b \implies (a \wedge b)) \\
(a \wedge b) &\leq a \\
(a \wedge b) &\leq b \\
a &\leq (a \vee b) \\
b &\leq (a \vee b) \\
(a \implies c) &\leq ((b \implies c) \implies ((a \vee b) \implies c)) \\
(a \implies b) &\leq ((a \implies \neg b) \implies \neg a) \\
\neg a &\leq (a \implies b)
\end{aligned}$$

Proof. Al deze eigenschappen zijn analoog, ter illustratie wordt de eerste bewezen. Dat $a \leq (b \implies a)$ geldt is equivalent met te zeggen dat $a \wedge b \leq a$ geldt, maar per definitie van $\wedge$ is dit dan ook het geval. □

Dus de elementen van een Heyting algebra vormen een IPC.

Alsook vormt elke IPC een Heyting-algebra:

Theorem 7. *De formules $\mathcal{F}$ in een IPC vormen een Heyting-algebra.*

Proof. Stel $p \leq q :\iff \vdash p \implies q$ en dan volgen de axioma's van een HA direct uit de axioma's van IPC. □

Chapter 3

Interne logica van een topos/ topoi as a model of PIL

In dit hoofdstuk zullen we eerst aan elke categorie $\mathcal{C}$ een type theory $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ associëren en op een topos $\mathcal{E}$ kunnen we bovenop $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ een intuistionistische logica definiëren die bovendien een interpretatie heeft in de topos zelf. Hierdoor kunnen formules in $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ worden geformuleerd a.d.h.v. eigenschappen van de topos zelf. We tonen dat de subobject classifier een Heyting-algebra is (en dus i.h.b. een model voor een intuistionistische logica). Hierdoor volgt het vanzelf dat de axioma's van de PIL voldaan zelf. We zullen ook laten zien dat de quantifiers $\forall, \exists$ ook kunnen worden geinterpreteerd in $\mathcal{E}$ en de corresponderende axioma's voor IPL m.b.t. de quantifiers zullen alsook voldaan zijn.
In de taal zullen ook termen van de vorm $a \in \gamma$ voorkomen waardoor we de axioma's van Zermelo-Fraenkel kunnen interpreteren in de topos en deze zullen bovendien geldig zijn in $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ (voor alle topoi $\mathcal{E}$). Alsook zullen we zien hoe het keuzeaxioma in $\mathcal{E}$ zich vertaalt in de context van de topos en deze karakterisatie is niet altijd geldig in een willekeurige topos, dus in het bijzonder zal ook het keuzeaxioma niet altijd gelden en men kan dan topoi construeren die dan de onafhankelijkheid aantoond van het keuzeaxioma, dit is gedaan in [6].

3.1 Mitchell-Bénabou taal

Nu definiëren we de termen (en formules) in de taal. Elk object $D \in \mathcal{E}$ is een type en er zijn dan een (oneindig) aantal variabelen van dit type en we noteren $x : X$ (later gebruiken we de notatie $x \in X$) voor x een variabele van type X. De verzameling van variabelen (van type X) noteren we met $Var(X)$, i.e. $x : X \iff x \in Var(X)$.

3.1.1 Syntax

Recursief definiëren we de termen:

- Als $x \in Var(X)$, dan is x een term van type X.
- Als σ, γ termen van type X, Y, dan is $\langle \sigma, \gamma \rangle$ een term van type $X \times Y$.
- Als σ, γ beide termen van type X, dan is $\sigma = \gamma$ een term van type Ω.
- Als $f \in Hom(X, Y)$ en σ term van type X, dan is $f \circ \sigma$ een term van type Y.
- Als $x \in Var(X)$ en σ term van type Z, dan is $\lambda x.\sigma$ een term van type Z^X.
- Als θ term van type Y^X en σ van type X, dan is $\theta(\sigma)$ een term van type Y.
- Als σ term van type X en τ van type Ω^X, dan is $\sigma \in \tau$ een term van type Ω.

Als σ een term is van type X, dan schrijven we ook $\sigma : X$.
Merk op dat in klassieke logica elke formule waardes heeft in $\Omega = \{0, 1\}$:

Definition 39. *Een formule in de Mitchell-Bénabou taal is een term van het type* Ω*.*

3.1.2 Semantiek

Semantiek wordt (in wiskunde) beschreven door modellen waarbij een model van een theorie, met termen $\mathbb{T}$, een koppel (X, I) is met X een verzameling I een afbeelding $I : \mathbb{T} \to X$, genaamd de interpretatie afbeelding.
In een topos kunnen we niet enkel de syntax (de termen) definiëren, maar kunnen we ook op een natuurlijke manier een model definiëren:

- Als $x \in Var(X)$, dan is de interpretatie $\ulcorner x \urcorner = Id : X \to X$.
- Stel $\sigma : U \to X, \gamma : V \to Y$ interpretaties, dan wordt $\langle \sigma, \gamma \rangle$ geinterpreteerd door $\ulcorner \langle \sigma p, \gamma q \rangle \urcorner : W \to X \times Y$ met W zodat er projecties $p : W \to U$ en $q : W \to V$ zijn.
- Stel $\sigma : U \to X, \tau : V \to X$ interpretaties, dan wordt $\sigma = \tau$ geinterpreteerd door $\ulcorner (\sigma = \tau) \urcorner : W \to X \times X \to \Omega$ met W en de map $W \to X \times X$ zoals hierboven en $X \times X \to \Omega$ is de karakteristieke afbeelding horende bij de diagonaal $\delta : X \to X \times X : x \mapsto (x, x)$.
- Stel $f \in Hom(X, Y)$ en $\sigma : U \to X$, dan is $f \circ \sigma$ geinterpreteerd door $\ulcorner f \circ \sigma \urcorner : U \to X \to Y$.
- Stel $\theta : V \to Y^X$ en $\sigma : U \to X$ interpretaties, dan is $\theta(\sigma)$ geinterpreteerd door $\ulcorner \theta(\sigma) \urcorner : W \to Y^X \times X \to Y$.

- Stel $\sigma : U \to X$ en $\tau : V \to \Omega^X$ interpretaties, dan is $\sigma \in \tau$ geinterpreteerd door $\ulcorner \sigma \in \tau \urcorner : W \to X \times \Omega^X \to \Omega$.
- Stel $x : X$ variabele en $\sigma : X \times U \to Z$ term, dan is $\lambda x \sigma$ geintepreteerd door $\ulcorner \lambda x \sigma \urcorner : U \to Z^X$.

Op een natuurlijke manier kunnen we nu ook formules van de vorm

$$p \wedge q, p \vee q, p \implies q, t, f, \neg p$$

interpreteren:

Theorem 8. *De termen van een intuistionistische propositielogica kunnen worden geïnterpreteerd in de Mitchell-Bénabou taal.*

Proof. Het bewijs van deze termen zijn analoog, ter illustratie geven we het argument van $p \vee q$. Stel $\ulcorner p \urcorner, \ulcorner q \urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ de interpretaties. Aangezien Ω een Heyting-algebra vormt, hebben we hierop een morfisme $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$. Dus

$$\vee \circ (\ulcorner p \urcorner, \ulcorner q \urcorner) : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega \times \Omega \to \Omega$$

vormt een formule. □

3.1.3 Verzamelingenleer

Nu dat we een intuistionistische propositielogica hebben ingevoerd, kunnen we de notie van verzamelingen in een topos introduceren. Dat deze voldoen aan de axioma's van Zermelo-Fraenkel, zal worden aangetoond nadat de Kripke-Joyal semantiek is ingevoerd.
Stel dat X een verzameling is en $\phi : X \to \{0,1\} = \Omega_{[Sets]}$ een formule. Dan is $\{x \in X | \phi(x)\}$ een deelverzameling (dus opnieuw een object in de categorie $[Set]$) en deze verzameling is dan gekarakteriseerd door volgende eigenschap:

Definition 40. *Het deelobject corresponderd bij een formule ϕ noteren we met*

$$\{x|\phi\} \rightarrowtail A_1 \times ... \times A_n$$

en zodat volgend diagram een pullback diagram is:

$$\begin{tikzcd} \{x|\phi\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d] \\ A_1 \times ... \times A_n \arrow[r, "\ulcorner \phi \urcorner"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Voor notationele redenen schrijven we in het vervolg

$$[\![\phi]\!] = \{a \in A_1 \times ... \times A_n | \phi\}.$$

Herinner dat de deelobjecten $Sub(A_1 \times ... \times A_n)$ een Heyting-algebra vormen.

Theorem 9. *Stel ϕ, ψ formules, dan gelden volgende eigenschappen:*

1. $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.
2. $[\![\phi \vee \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cup [\![\psi]\!]$.
3. $[\![\phi \implies \psi]\!] = [\![\phi]\!] \implies [\![\psi]\!]$.
4. $[\![\neg\phi]\!] = \neg[\![\phi]\!]$.

Proof. 1. Per definitie van $\wedge$ is volgend diagram een pullback diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] \arrow[d, hook, "\Delta"] & \mathbf{1} \arrow[d, hook, "\mathbf{true}"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "(\phi,\psi)"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

We tonen nu dat volgend diagram een pullback diagram is:

$$\begin{tikzcd}
[\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!] \arrow[r, "\mathbf{true}"] \arrow[d, hook] & \Omega \arrow[d, hook, "\Delta"] \\
A_1 \times ... \times A_n \arrow[r, "(\phi,\psi)"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

Want als we deze diagrammen naast elkaar zetten is dit opnieuw een pullback diagram en hebben we dus dat $[\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$ de formule $\phi \wedge \psi$ classificeert, maar aangezien dat de classificatie door een pullback wordt gedefinieerd zijn $[\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$ en $[\![\phi \wedge \psi]\!]$ isomorf.
Merk op dat we volgend diagram hebben:

$$\begin{tikzcd}
 & [\![\psi]\!] \arrow[d, hook] & \\
[\![\phi]\!] \arrow[r, hook] & A_1 \times ... \times A_n \arrow[dr, shift left, "(\phi,\psi)"] \arrow[dr, shift right, "\Delta \circ \mathbf{true}_A"'] & \\
 & & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

Als we nu het limiet nemen van dit diagram, krijgen we $[\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$, want dit object is pullback (of equaliser) van $[\![\phi]\!] \hookrightarrow A_1 \times ... \times A_n$ met $[\![\psi]\!] \hookrightarrow A_1 \times ... \times A_n$.

2. Per definitie is volgend diagram een pullback diagram:

$$\begin{tikzcd}
[\![\phi]\!] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\
A_1 \times ... \times A_n \arrow[r, "\phi"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Merk op dat hieruit dan volgt dat volgend diagram een pullback diagram is:

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \phi \rrbracket \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & \mathbf{1} \times \Omega \arrow[d, "true \times Id_\Omega"] \\
A_1 \times ... \times A_n \arrow[r, "\phi \times \psi"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

Analoog is volgend diagram een pullback diagram:

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \psi \rrbracket \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & \Omega \times \mathbf{1} \arrow[d, "Id_\Omega \times \mathbf{true}"] \\
A_1 \times ... \times A_n \arrow[r, "\phi \times \psi"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

Aangezien $\vee$ het karakteristiek morfisme is van de unie van $\mathbf{true} \times Id_\Omega$ en $Id_\Omega \times \mathbf{true}$ hebben we dus dat $\llbracket \phi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$ en $\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket$ isomorf zijn (analoog argument als bij de doorsnede).

3. Voor dit bewijs wordt er verwezen naar [2].

4. Merk op dat in een heyting algebra het complement gedefinieerd is als $\neg a = (a \implies 0)$. Dus gebruik makend van 3 hebben we

$$\llbracket \neg \phi \rrbracket = \llbracket \phi \implies 0 \rrbracket = (\llbracket \phi \rrbracket \implies \llbracket 0 \rrbracket) = (\llbracket \phi \rrbracket \implies 0) = \neg \llbracket \phi \rrbracket.$$

□

3.1.4 Quantifiers

Nu gaan we de quantifiers $\forall, \exists$ definiëren in de taal van onze topos, waardoor de interne logica niet enkel de intuistionistische propositielogica is, maar ook een predicatenlogica vormt. Als eerst gaan we de intuitie erachter afleiden door te kijken naar $[Sets]$, dan zullen we het veralgemenen.
Stel $\phi(x, y) : X \times Y \to \Omega$ een formule. Deze formule induceert de verzameling bestaande uit elementen die waar zijn onder ϕ:

$$S := \{(x, y) | \phi(x, y)\} \subset X \times Y.$$

Analoog induceert de formule $\forall x \phi(x, y) : Y \to \Omega$ de verzameling

$$T := \{y | \forall x \phi(x, y)\} \subset Y.$$

Als we $p : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y$ stellen, dan hebben we dat $T \subset p(S) \subset Y$, oftewel

$$T = \{y \in p(S) | \forall x \phi(x, y)\}.$$

Noteer nu $\forall_p S := T$, dan hebben we volgende afbeelding:

$$\forall_p : \mathbb{P}(X \times Y) \to \mathbb{P}(Y) : S \mapsto \forall_p S.$$

Dus de quantifiers kunnen we (op verzamelingen) formeel definiëren als een afbeelding. Analoog definiëren we $\exists_p$ als volgt:

$$\exists_p : \mathbb{P}(X \times Y) \to \mathbb{P}(Y) : S \mapsto \exists_p S = \{y \in p(S) | \exists x \phi(x, y)\}.$$

Merk op dat we nu expliciet ϕ gebruiken, maar bij een verzameling S kunnen we ook een formule $\hat{\phi}$ associeren door te stellen dat $\hat{\phi(x)} = 1$ als $x \in S$ en 0 als $x \notin S$, dus we kunnen $\exists_p$ ook definiëren als

$$\exists_p(S) = \{y \in p(S) | \exists x : (x, y) \in S\}$$

en analoog voor $\forall_p(S)$.
Volgende stelling toont waarom dat de afbeelding $p(x, y) = y$ hebben ingevoerd:

Theorem 10. *Stel $p^{-1} : \mathbb{P}(Y) \to \mathbb{P}(X \times Y) : T \mapsto \{(x, y) | y \in T\}$. Dan is $\exists_p$ de linkse adjunctie van p^{-1} en $\forall_p$ de rechtse.*

Proof. Dat $\exists_p$ de linkse adjunctie is van p^{-1} betekent dat

$$Hom(\exists_p(S), T) \cong Hom(S, p^{-1}(T))$$

en $\forall_p$ is de rechtse adjunctie van p^{-1} als

$$Hom(p^{-1}(T), S) \cong Hom(T, \forall_p(S))$$

voor $S \subset X \times Y$ en $T \subset Y$.
Merk op dat de morfismen van $\mathbb{P}(X \times Y)$ en $\mathbb{P}(Y)$ juist de inclusies representeren, dus de bovenstaande Hom-sets zijn ofwel leeg ofwel bevatten ze maar 1 elemenent. Om de eerste claim (linkse adjunctie) te bewijzen moeten we dus bewijzen dat $\exists_p(S) \subset T \iff S \subset p^{-1}(T)$ en dit geldt want:

$$\begin{aligned}
\exists_p(S) \subset T &\iff [y \in \exists_p(S) \implies y \in T] \\
&\iff [(y \in p(S) : \exists x : (x, y) \in S) \implies y \in T] \\
&\iff p(S) \subset T \\
&\iff (x, y) \in S \implies y = p(x, y) \in T \\
&\iff S \subset p^{-1}(T)
\end{aligned}$$

Hierdoor kunnen we dus concluderen dat $Hom(\exists_p(S), T) \cong Hom(S, p^{-1}(S))$ want een inclusie komt juist overeen met een morfisme.
Het argument dat $\forall_p(S)$ de rechtse adjunctie is van p^{-1} is analoog. $\square$

Volgende stelling zegt i.h.b. dat voorgaande adjuncties in een topos $\mathcal{E}$ altijd bestaan:

Theorem 11. *Stel $f \in Hom_{\mathcal{E}}(X,Y)$, dan bestaat er een functor $f^{-1} : Sub(Y) \to Sub(X)$ met adjuncties $(\exists_f, f^{-1})$ en $(f^{-1}, \forall_f)$. En f^{-1} is geinduceerd als de pullback van*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Aangezien $\{(x,y) \in X \times Y | \phi(x,y)\} \in Sub(X \times Y)$ een deelobject is, zijn $\forall_\pi(\{(x,y) \in X \times Y|\phi(x,y)\})$ en $\exists_\pi(\{(x,y) \in X \times Y|\phi(x,y)\})$ deelobjecten van Y. Bovendien corresponderen deze tot de formules $\forall x \in X : \phi(x,y)$ en $\exists x \in X : \phi(x,y)$ want

$$\forall_\pi(\{(x,y) \in X \times Y|\phi(x,y)\}) = \{y \in Y : \forall x \phi(x,y)\}.$$

Merk op dat deze objecten dus ook worden gegeven door de pullbacks van $Y \xrightarrow{\forall x\phi(x,y)} \Omega \xleftarrow{\text{true}} 1$ en $Y \xrightarrow{\exists x\phi(x,y)} \Omega \xleftarrow{\text{true}} 1$.

3.2 Intuistionistische propositielogica in een topos

Stel $\mathcal{E}$ een topos met als subobject classifier $1 \rightarrowtail \Omega$. We zullen nu aantonen dat de taal $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ altijd voldoet aan de axioma's van de intuistionistische propositielogica. Dit volgt omdat Ω een interne Heyting-algebra is en dat de interpretaties van termen zal factoriseren door $\wedge, \vee, \implies \in Hom_{\mathcal{E}}(\Omega, \Omega)$.

Lemma 2. *$\vDash \phi \implies \psi$ geldt in $\mathcal{E}$ als en slechts als $[\![\phi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$.*

Proof. Stel dat $\vDash \phi \implies \psi$ geldt, dus $[\![\phi \implies \psi]\!] = A_1 \times ... \times A_n$. Dus volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "{(\phi,\psi)}"] & \mathbf{1} \arrow[d, hook, "\mathbf{true}"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\implies"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Maar $\implies$ is het characteristek morfisme van $\leq \hookrightarrow \Omega \times \Omega$, i.e.

$$\begin{tikzcd} \leq \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, hook, "\mathbf{true}"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\implies"] & \Omega \end{tikzcd}$$

is een pullback diagram. Aangezien we morfismen $(\phi, \psi) : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega \times \Omega$ en $A \twoheadrightarrow \mathbf{1}$ hebben, hebben we dus een factorisatie $a : A \to \leq$. Maar $\leq$ is per definitie de equaliser van

$$\leq \hookrightarrow \Omega \times \Omega \underset{\pi_1}{\overset{\wedge}{\rightrightarrows}} \Omega$$

Dus als we alles samen zetten krijgen we volgend (commuterend) diagram:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "{(\phi,\psi)}"'] & \leq \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, hook, "\mathbf{true}"] \\
& \Omega \times \Omega \arrow[r, "\Rightarrow"] \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\wedge"] & \Omega \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

We concluderen hieruit dat $\phi = \phi \wedge \psi$ (als morfismen $A_1 \times ... \times A_n$). Dus hun corresponderen deelobjecten zijn gelijk (op isomorfie na), i.e. $[\![\phi]\!] = [\![\phi \wedge \psi]\!]$. Maar per definitie van $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$ hebben we dat volgend diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
{[\![\phi]\!] = [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & {[\![\phi]\!]} \arrow[d, hook] \\
{[\![\psi]\!]} \arrow[r, hook] & A_1 \times ... \times A_n
\end{tikzcd}$$

En we hebben dus i.h.b. een embedding $[\![\phi]\!] \hookrightarrow [\![\psi]\!]$, dus per definitie hebben we $[\![\phi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$. □

Theorem 12. *$\mathcal{T}(\mathcal{E})$ voldoet aan de axioma's van IPL.*

Proof. Zoals vermeld volgt dit direct uit het feit dat Ω een interne Heyting-algebra is, want dit is equivalent met te zeggen dat $Hom(A, \Omega)$ een Heyting-algebra vormt (voor alle $A \in \mathcal{O}bj(\mathcal{E})$). Merk op dat in propositielogica we enkel formules van de vorm $\phi \implies \psi$ hebben. En we hebben $\vDash \phi \implies \psi$ als en slechts als $[\![\phi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$, dus de axiomas van IPL volgen nu uit de eigenschappen van heyting algebras. Het enigste wat nog moet worden bewezen is nog de modus ponens regel:

$$[\vDash \phi \text{ en } \vDash \phi \implies \psi] \implies \vDash \psi.$$

Maar als we deze opschrijven in termen van de deelobjecten krijgen we:

$$[[\![\phi]\!] = A_1 \times ... \times A_n \text{ en } [\![\phi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]] \implies [\![\psi]\!] = A_1 \times ... \times A_n,$$

dit is dus direct. □

3.3 Intuistionistische predicatenlogica in een topos

Theorem 13. *De interne taal van een topos voldoet aan de axiomas van de intuistionistische predicatenlogica:*

1. $\vDash (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\forall x\phi) \implies (\forall x\psi))$.
2. $\vDash (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\exists x\phi) \implies (\exists x\psi))$.
3. $\vDash \phi \implies (\forall x\phi)$ *(als x geen vrije variabele is van ϕ).*

4. $\models (\exists x\phi) \implies \phi$ *(als x geen vrije variabele is van* ϕ*).*

5. $\models (\forall x\phi) \implies \phi(t)$ *(als x geen gebonde variabele is van* ϕ*).*

6. $\models \phi(t) \implies (\exists x\phi)$ *(als x geen gebonde variabele is van* ϕ*).*

7. Als $\models \phi$*, dan* $\models \forall x\phi$*.*

Proof. Ter illustratie worden de eerste 2 eigenschappen bewezen, voor het bewijs van de andere eigenschappen wordt er verwezen naar [2].
Als eerst bewijzen we

$$\models (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\forall x\phi) \implies (\forall x\psi)).$$

Stel ϕ en ψ formules met vrije variabelen $(x, x_1, ..., x_n) : A \times A_1 \times ... \times A_n$ en stel $p : A \times A_1 \times ... \times A_n$ de projectie op $A_1 \times ... \times A_n$. We hebben dan volgende equivalenties:

$$\begin{array}{ll} & \models (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\forall x\phi) \implies (\forall x\psi)) \\ \iff & [\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \subseteq [\![\forall x\phi]\!] \implies [\![\forall x\psi]\!] \\ \iff & [\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \cap [\![\forall x\phi]\!] \subseteq [\![\forall x\psi]\!] \\ \iff & p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \cap [\![\forall x\phi]\!]\right) \subseteq [\![\psi]\!] \\ \iff & p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \cap p^{-1}\left([\![\forall x\phi]\!]\right) \subseteq [\![\psi]\!] \end{array}$$

We bewijzen nu de laatste karakterisatie:

$$\begin{array}{rcl} p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \cap p^{-1}\left([\![\forall x\phi]\!]\right) & \subseteq & [\![\phi \implies \psi]\!] \cap [\![\phi]\!] \\ & = & ([\![\psi]\!] \implies [\![\phi]\!]) \cap [\![\phi]\!] \\ & \subseteq & [\![\psi]\!] \end{array}$$

Dit bewijst dus de eerste statement, analoog bewijzen we nu

$$\models (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\exists x\phi) \implies (\exists x\psi)).$$

We nemen ϕ, ψ en p hetzelfde, dan hebben we volgende equivalenties:

$$\begin{array}{ll} & \models (\forall x(\phi \implies \psi)) \implies ((\exists x\phi) \implies (\exists x\psi)) \\ \iff & [\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \subseteq [\![\exists x\phi]\!] \implies [\![\exists x\psi]\!] \\ \iff & [\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \cap [\![\exists x\phi]\!] \subseteq [\![\exists x\psi]\!] \\ \iff & [\![\exists x\phi]\!] \subseteq [\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \implies [\![\exists x\psi]\!] \\ \iff & [\![\phi]\!] \subseteq p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!] \implies [\![\exists x\psi]\!]\right) \\ \iff & [\![\phi]\!] \cap p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \subseteq p^{-1}\left([\![\exists x\psi]\!]\right) \\ \iff & \exists_p([\![\phi]\!] \cap p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \subseteq \exists_p\left([\![\psi]\!]\right) \end{array}$$

Aangezien $\exists_p$ de orde bewaart is het dus voldoende om het volgende te bewijzen:

$$[\![\phi]\!] \cap p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \subseteq [\![\psi]\!]$$

En dit geldt want:

$$[\![\phi]\!] \cap p^{-1}\left([\![\forall x(\phi \implies \psi)]\!]\right) \subseteq [\![\phi]\!] \cap [\![\phi \implies \psi]\!] \subseteq [\![\psi]\!].$$

□

3.4 Kripke-Joyal semantiek

Om te bewijzen dat de axiomas van Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer gelden in de geconstrueerde logica horende bij een topos, zullen we de Kripke-Joyal semantiek introduceren. De reden hiervoor is dat de bewijzen m.b.v. de Mitchell-Bénabou taal zeer lang worden en dus heel wat werk nodig hebben. De volgende semantiek zal de formules op een praktischere manier interpreteren waardoor we de axiomas van ZF kunnen reduceren tot meer praktischere statements om mee te werken. In de Mitchell-Bénabou taal is ϕ waar, genoteerd $\vDash \phi$, als $\ulcorner \phi \urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ factoriseert door $true$, i.e. $t_{A_1,...,A_n} = \ulcorner \phi \urcorner$. In de semantiek gaan we zeggen dat ϕ waar is als de compositie met gegeneraliseerde elementen door $true$ factoriseert. Intuitief betekent dit dat we kunnen besluiten dat een formule waar is als de formule waar is voor alle elementen.

Definition 41. *Stel $\mathcal{C}$ een categorie. Een klasse van generators is een klasse van objecten $\{X_i \in Obj(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ zodat:*

$$\forall f, g : X \to Y : f \neq g \implies \exists i \in I : \exists h : X_i \to X : f \circ h \neq g \circ h.$$

Elke categorie heeft zo'n klasse, door als collectie $Obj(\mathcal{C})$ te nemen, maar in sommige categoriën zijn er wel degelijk minder objecten:

Example 4.
- *In $[Sets]$ is het terminaal object (een singleton) een generator, want functies worden volledig bepaald door hoe ze op elementen werken en er is een bijectie tussen een verzameling X en de homset $Hom(1, X)$.*
- *In $[AbGrp]$ is $\mathbb{Z}$ een generator door te kijken naar $\mathbb{Z} \to X : n \mapsto n \times x$.*

Generators zullen strikt genomen niet noodzakelijk zijn aangezien we altijd alle objecten kunnen bekijken als gegeneraliseerde elementen, maar dit kan in specifieke voorbeelden vele handiger zijn omdat er minder controle nodig is. In sommige literatuur zal ook de term *seperator* worden gebruikt i.p.v. generator omdat generators ook in andere context worden gedefinieerd.
Stel vanaf nu $\mathcal{E}$ een topos met $\mathcal{G}$ een klasse van generators, we noemen de elementen van $\mathcal{G}$ levels.

Definition 42. *Een overdekking van een level $U \in \mathcal{G}$ is een klasse van epimorfismen $(u_i : U_i \to U)_{i \in I}$ met $U_i \in \mathcal{G}$ levels.*

Definition 43. *Stel $U \in \mathcal{G}$ een level en $a : U \to A$ een morfisme, dan noemen we a een element van A op level U en we noteren $a \in_U A$.*

Definition 44. *Stel $\ulcorner \tau \urcorner : A_1 \times ...A_n \to A$ een term en $a_i \in_U A_i$ elementen ($i = 1, ..., n$). Dan definiëren we $\tau(a_1, ..., a_n) \in_U A$ als de compositie*

$$U \xrightarrow{(a_1 ... a_n)} A_1 \times ... \times A_n \xrightarrow{\ulcorner \tau \urcorner} A$$

Als $\tau = \phi$ een formule is en $\phi(a_1, ..., a_n) = t_U$, dan noteren we $\vdash_U \phi(a_1, ..., a_n)$ en zeggen we dat $(a_1, ..., a_n)$ voldoet aan ϕ.

Theorem 14. *Stel* $\ulcorner\phi\urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ *een formule. Dan zijn de volgende equivalent:*

1. $\vDash \phi$
2. $\forall U \in \mathcal{G} : \forall i = 1, ..., n : a_i \in_U A_i :\vdash_U \phi(a_1, ..., a_n)$

Proof. Stel dat 1 geldt, i.e. $\ulcorner\phi\urcorner$ factoriseert door $t : 1 \to \Omega$. Hierdoor factoriseert $\ulcorner\phi\urcorner \circ (a_1, ..., a_n)$ ook door t en dus geldt per definitie $\vdash_U \phi(a_1, ..., a_n)$.
Stel dat 2 geldt, dus $\ulcorner\phi\urcorner \circ (a_1, ..., a_n) = t_U$. Maar in het algemeen geldt ook $t_{A_1 \times ... \times A_n} \circ (a_1, ..., a_n) = t_U$, dus $\ulcorner\phi\urcorner \circ (a_1, ..., a_n) = t_{A_1 \times ... \times A_n} \circ (a_1, ..., a_n)$. Aangezien $\mathcal{G}$ een klasse van generatoren is hebben we dus $\ulcorner\phi\urcorner = t_{A_1 \times ... \times A_n}$ en dus per definitie $\vDash \phi$. □

Definition 45. *Stel* $U, V \in \mathcal{G}$ *levels. Een verandering van levels is een morfisme* $u : V \to U$*. Als* $a \in_U A$*, dan noemen we* $a \circ u \in_V A$ *de restrictie van* a *op level* V *en we noteren* $a|_u = a \circ u$*.*

Theorem 15. *Stel* $u : V \to U$ *een verandering van levels. Als* $\vdash_U \phi(a_1, ..., a_n)$*, dan* $\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u)$*.*

Proof. $\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u)$ is waar als $\ulcorner\phi\urcorner \circ (a_1, ..., a_n) \circ u$ factoriseert door $t : 1 \to \Omega$. Maar als $\vdash_U \phi(a_1, ..., a_n)$ geldt, dan factoriseert $\ulcorner\phi\urcorner \circ (a_1, ..., a_n)$ door t en dus zeker de compositie met u. □

Theorem 16. $\vdash_U$ *true.*

Proof. Dit geldt per definitie. □

Theorem 17. $\vdash_U$ *false als en slechts als* $U = 0$*.*

Proof. Stel $u : U \to 1$. Als $\vdash_U false$ geldt, dan is $false \circ u = t_U = true \circ u$, i.e.

$$U \xrightarrow{u} 1 \underset{t}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \Omega$$

Merk op dat volgend diagram een equaliser diagram is:

$$0 \longrightarrow 1 \underset{t}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \Omega$$

Dus vanwege de universele eigenschap van de equaliser hebben we een morfisme $U \to 0$, maar 0 is een initiëel object, dus $U = 0$.
Stel nu $U = 0$ en $u : 0 \to 1$, aangezien er maar een uniek morfisme is uitgaande is van 0, is $u \circ t = u \circ f$. □

Theorem 18. *Stel* $\ulcorner\tau\urcorner, \ulcorner\sigma\urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to A$ *termen, dan zijn de volgende equivalent:*

1. $\vdash_U (\tau = \sigma)(a_1, ..., a_n)$
2. $\tau(a_1, ..., a_n) = \sigma(a_1, ..., a_n)$

Proof. Merk op dat $(=_A) \circ (\ulcorner\tau\urcorner, \ulcorner\sigma\urcorner) \circ (a_1, ..., a_n) = t_{A_1 \times ... \times A_n}$ als en slechts als $(\ulcorner\tau\urcorner, \ulcorner\sigma\urcorner) \circ (a_1, ..., a_n)$ factoriseert door Δ_A, maar dit is enkel en indien $\tau(a_1, ..., a_n) = \ulcorner\tau\urcorner \circ (a_1, ..., a_n) = \ulcorner\sigma\urcorner(a_1, ..., a_n) = \sigma(a_1, ..., a_n)$. $\square$

Theorem 19. *Stel* $\ulcorner\tau\urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to A$ *en* $\ulcorner\Sigma\urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega^A$ *termen. Schrijf* $\sigma_U : \Sigma_U \to A \times U$ *het subobject horende bij* $\Sigma(a_1, ..., a_n) : U \to \Omega^A$ *(merk op dat dit correspondeert met een formule vanwege de cartesisch geslotenheid van een topos). De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\tau \in \Sigma)(a_1, ..., a_n)$
2. $(\tau(a_1, ..., a_n), 1_U) \in_U \Sigma_U$

Proof. We hebben dat $\vdash_U (\tau \in \Sigma)(a_1, ..., a_n)$ geldt als

$$U \xrightarrow{(a_1, ..., a_n)} A_1 \times ... \times A_n \xrightarrow{(\ulcorner\tau\urcorner, \ulcorner\Sigma\urcorner)} A \times \Omega^A \xrightarrow{\in_A} \Omega$$

gelijk is aan t_U. Merk op dat we samenstelling als volgt kunnen schrijven:

$$U \xrightarrow{f} A \times U \xrightarrow{g} A \times \Omega^A \xrightarrow{\in_A} \Omega$$

met $f = (\Sigma(a_1, ..., a_n), 1_U)$ en $g = (1_A, \Sigma(a_1, ..., a_n))$. Merk op dat $\in_A \circ (1_A, \Sigma(a_1, ..., a_n))$ het characteristiek morfisme is van $\sigma_U : \Sigma_U \to A \times U$, want $\in_A$ correspondeert met Id_{Ω^A} vanwege dat $\mathcal{E}$ cartesisch gesloten is.
Omdat $\in_A$ correspondeert met de identiteit op Ω^A zal dus $U \to \Omega = t_U$ als en slechts als $U \to A \times U$ factoriseert door σ_U. $\square$

Theorem 20. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\neg\phi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\forall V \in \mathcal{G}, \forall u : V \to U : (\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u) \iff V = 0)$

Proof. Veronderstel dat 1 geldt. Merk op dat we hiervoor al hebben bewezen dat als $V = 0$ is, dat $\vdash_V false$ geldt, dus we hoeven enkel nog te bewijzen dat $\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u)$ impliceert dat $V = 0$. Aangezien $\vdash_U (\neg\phi)(a_1, ..., a_n)$ geldt, hebben we dus wegens een voorgaande stelling dat $\vdash_V (\neg\phi)(a_1|_u, ..., a_n|_u)$ geldt. Dus we hebben dat $\vdash_V true$ en $\vdash_V false$, dus we hebben (vanwege een voorgaand resultaat) dat $V = 0$.
Veronderstel dat 2 geldt. We weten al dat $V = 0 \iff \vdash_V false$. Dus wegens het gegeven geldt $\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u) \iff \vdash_V false$. Hierdoor hebben deze formules dezelfde realisaties want $\mathcal{G}$ is de klasse van generators, dus hun negaties hebben dezelfde realisaties. $\square$

Corollary 1. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\neg\neg\phi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\forall 0 \neq V \in \mathcal{G} : \forall u : V \to U : \exists 0 \neq W \in \mathcal{G} : \exists v : W \to V : \vdash_w \phi(a_1|_{u \circ v}, ..., a_n|_{u \circ v})$

Proof. Merk op dat wegens het voorgaande theorema, 1 equivalent is met

$$\forall V \in \mathcal{G}, \forall u : V \to U : (\vdash_V (\neg\phi)(a_1|_u, ..., a_n|_u) \iff V = 0)\,.$$

Veronderstel dat 1 geldt. Stel $0 \neq V \in \mathcal{G}$ en $u : V \to U$. Aangezien $V \neq 0$ geldt $\vdash_V (\neg\phi)(a_1|_u, ..., a_n|_u)$ niet. Dus als we nu de negatie van voorgaande stelling herhalen krijgen we

$$\exists W \in \mathcal{G}, \exists v : W \to V : (\vdash_W \phi(a_1|_{u\circ v}, ..., a_n|_{u\circ v}) \not\Longleftrightarrow W = 0)\,,$$

maar $W = 0$ impliceert altijd $\vdash_W \mathit{false}$, dus $W \neq 0$ en

$$\vdash_W \phi(a_1|_{u\circ v}, ..., a_n|_{u\circ v})$$

wat het gestelde is.
Veronderstel nu dat 2 waar is en neem $V \in \mathcal{G}, u : V \to U$. We moeten bewijzen dat $V = 0 \iff \vdash_V (\neg_V)(a_1|_u, ..., a_n|_u)$. Van links naar rechts geldt altijd, dus veronderstel $\vdash_V (\neg\phi)(a_1|_u, ..., a_n|_u)$. Dus wegens voorgaande stelling geldt

$$\forall W : \forall v : W \to V : (\vdash_W \phi(a_1|_{u\circ v}, ..., a_n|_{u\circ v}) \iff W = 0)\,.$$

Maar volgens 2 is dit niet mogelijk als $V \neq 0$, dus $V = 0$. □

Theorem 21. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\phi \wedge \psi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\vdash_U (\phi)(a_1, ..., a_n)$ *en* $\vdash_U (\psi)(a_1, ..., a_n)$

Proof. Stel $[\![\phi(a)]\!]$ (resp. $[\![\psi(a)]\!]$) het subobject corresponderd bij $\phi(a_1, ..., a_n)$ (resp. $\psi(a_1, ..., a_n)$), dan is $[\![\phi(a)]\!] \cap [\![\psi(a)]\!]$ het subobject corresponderd bij $(\phi \wedge \psi)(a_1, ..., a_n)$, dus $[\![(\phi \wedge \psi)(a_1, ..., a_n)]\!] = [\![\phi(a)]\!] \cap [\![\psi(a)]\!]$.
Dan is 1 equivalent met $[\![\phi(a)]\!] \cap [\![\psi(a)]\!] = U$ en 2 is equivalent met ($U = [\![\phi(a)]\!]$ en $U = [\![\psi(a)]\!]$) en de equivalentie geformuleerd in termen van de subobjecten is evident, want $[\![\phi(a)]\!], [\![\psi(a)]\!]$ en $[\![\phi(a)]\!] \cap [\![\psi(a)]\!]$ zijn subobjecten van U en kunnen dus niet groter zijn dan U. □

Theorem 22. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\phi \vee \psi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\exists v : V \to U : \exists W \to U : \vdash_V \phi(a_1|_v, ..., a_n|_v)$ *en* $\vdash_W \phi(a_1|_w, ..., a_n|_w)$

Theorem 23. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\phi \implies \psi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\forall V : \forall u : V \to U :$ *als* $\vdash_V \phi(a_1|_u, ..., a_n|_u)$ *dan* $\vdash_V \psi(a_1|_u, ..., a_n|_u)$

Theorem 24. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\exists x\phi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\exists (u_i : U_i \to U)_{i\in I} : \exists b_i \in_{U_i} A : \forall i \in I : \vdash_{U_i} \phi(b_i, a_1|_{U_i}, ..., a_n|_{U_i})$

Theorem 25. *De volgende zijn equivalent:*

1. $\vdash_U (\forall x\phi)(a_1, ..., a_n)$
2. $\forall V : \forall v : V \to U : \forall b \in_V A : \vdash_V \phi(b, a_1|_U, ..., a_1|_U)$

3.5 Localisatie principe

Definition 46. *Gegeven $U \in Obj(\mathcal{E})$. Dan definiëren we de functor U^* als:*

$$U^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/U : A \mapsto p_A : U \times A \to U$$

met p_A de projectie van $U \times A$ op U.

Vooraleer we het localisatie principe geven bekijken we eerst de globale elementen van $U^*(A)$ met $A \in Obj(\mathcal{E})$:
Een globaal element is een morfisme $\mathbf{1} \to X$ voor een zeker object X. In $\mathcal{E}/U$ is het terminaal object de identiteit $Id_U : U \to U$ (merk op dat dit inderdaad het geval is want gegeven een object $f : X \to U$ hebben we een afbeelding $f = Id_U \circ f$, dus elk object heeft een morfisme naar id_U).
We hebben $U^*(A) = p_A : U \times A \to U$, dus een globaal element van $U^*(A)$ is een morfisme $\alpha : U \to U \times A$ zodat (per definitie van een morfisme in de slice categorie) $p_A \circ \alpha = Id_U$. Dus we hebben noodzakelijk $\alpha = (a, Id_U)$ met $a : U \to A$ willekeurig.

Theorem 26. *("Lokalisering principe") Stel $\ulcorner \phi \urcorner : A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ en $U \in Obj(\mathcal{E})$. Schrijf ϕ_U voor de formule in $\mathcal{E}/U$ gegeven door*

$$\ulcorner \phi_U \urcorner = U^*(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Dan zijn de volgende equivalent:

1. *$\mathcal{E} \vDash \phi$.*
2. *$\mathcal{E}/U \vDash \phi_U(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ geldt voor alle globale elementen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ van $U^*(A_1), ..., U^*(A_n)$.*

Merk op dat de slice category uit de globale elementen over U bestaat, dus de voorgaande stelling is belangrijk omdat deze zegt dat een formule waar is in ϕ, als deze waar is voor alle globale elementen. Een mooie toepassing hiervan is:

Theorem 27. *De volgende zijn equivalent:*

1. *$\mathcal{E} \vDash (\phi \implies \psi)$.*
2. *$\forall U \in \mathcal{E} : (\mathcal{E}/U \vDash \phi_U) \implies (\mathcal{E}/U \vDash \psi_U)$.*

3.6 Intuistionistische verzamelingenleer in een topos

We hebben nu aangetoond dat een topos een model is voor intuistionistische verzamelingenleer. De klassieke verzamelingen zijn een bijzonder geval hiervan, in deze sectie bespreken we wanneer een topos overeen komt met een klassieke verzameling. Alsook zal dit belangrijk zijn bij het bewijs van de onafhankelijkheid van het keuzeaxioma, anders vormt dit geen model voor de klassieke verzamelingenleer. De topoi die hier aan voldoen zijn juist de boolse topoi:

Theorem 28. *$\mathcal{E}$ is bools als en slechts als* $\models \neg\neg p \implies p$.

Proof. De formule $\neg\neg p \implies p$ geldt (per definitie) in $\mathcal{E}$ als

$$[\![\neg\neg p \implies p]\!] = A_1 \times ... \times A_n,$$

maar we hebben:

$$[\![\neg\neg p \implies p]\!] = ([\![\neg\neg p]\!] \implies [\![p]\!])$$
$$[\![\neg\neg p]\!] \implies [\![p]\!] = A_1 \times ... \times A_n \iff [\![\neg\neg p]\!] \subseteq [\![p]\!]$$

Dus

$$\models \neg\neg p \implies p \iff [\![\neg\neg p]\!] \subseteq [\![p]\!]$$

Aangezien in een Heyting-algebra $a \leq \neg\neg a$ geldt, hebben we

$$[\![p]\!] = [\![\neg\neg p]\!] \iff [\![\neg\neg p]\!] \subseteq [\![p]\!].$$

Merk op dat een heyting algebra bools is als en slechts als $\neg\neg a = a$ en aangezien $\neg[\![\phi]\!] = [\![\neg\phi]\!]$ geldt, zijn we dus klaar. □

Theorem 29. *Stel $x, y, z : A, x_i, y_i : A_i$ variabelen, $t(x_1, ..., x_n)$ term en $\phi(x_1, ..., x_n)$ variabelen. Dan geldt:*

$$\begin{array}{ll}
\models & x = x \\
\models & (x = y) \implies (y = x) \\
\models & (x = y) \wedge (y = z) \implies (x = z) \\
\models & (x_1 = y_1) \wedge ... \wedge (x_n = y_n) \iff (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n) \\
\models & (x_1 = y_1) \wedge ... \wedge (x_n = y_n) \implies t(x_1, ..., x_n) = t(y_1, ..., y_n) \\
\models & (x_1 = y_1) \wedge ... \wedge (x_n = y_n) \wedge \phi(x_1, ..., x_n) \implies \phi(y_1, ..., y_n) \\
\models & \phi(y_1, ..., y_n) \implies \exists x_1 ... x_n : (\models (x_1 = y_1) \wedge ... \wedge (x_n = y_n) \wedge \phi(x_1, ..., x_n))
\end{array}$$

Theorem 30. *(Extensionaliteit) Stel $a : A, S, R : \Omega^A$, dan:*

$$\models (\forall a(a \in S \iff a \in R)) \implies (S = R).$$

Proof. Vanwege het localisatieprincipe is het voldoende om de stelling te bewijzen voor S, R globale elementen van Ω^A. Stel $s : S \hookrightarrow A$ en $r : R \hookrightarrow A$ de corresponderen deelobjecten. Vanwege de Kripke-Joyal semantiek moeten we bewijzen dat voor alle $U \in \mathcal{E}$ en $a : U \to A$ geldt dat als a factoriseert door s als en slechts a factoriseert door r, dan zijn $S = R$ dezelfde globale elementen van Ω^A.
Kies $a = s$, dan factoriseert r door s en analoog factoriseert s door r, maar dit is enkel het geval als $S \cong R$, dus deze representeren hetzelfde deelobject, dus deze hebben hetzelfde karakteristiek morfisme $A \to \Omega$ en dus vanwege het cartesisch gesloten zijn corresponderen ze met het hetzelfde globale element $\mathbf{1} \to \Omega^A$. □

Theorem 31. *(Replacement) Stel* $a : A, b : B, R : \Omega^A, S : \Omega^B, \phi(x, y, z_1, ..., z_n) :$ $A \times B \times C_1 \times ... \times C_n$*, dan:*

$$\models (\forall a : a \in S \implies !b\phi(a, b)) \implies (\exists R \forall b(b \in R \iff \exists a(a \in S \wedge \phi(a, b))))$$

Theorem 32. *(Seperation) Stel* $b : A, R, S : \Omega^A$ *variabelen,* $\phi(x, x_1, ..., x_n) :$ $A \times A_1 \times ... \times A_n$*, dan:*

$$\models \forall S \exists R \forall b(b \in R \iff b \in S \wedge \phi(b))$$

Theorem 33. *(Unie) Stel* $b : A, R, T : \Omega^A, \mathcal{P} : \Omega^{\Omega^A}$ *variabelen, dan:*

$$\models \forall \mathcal{P} \exists R \forall B(b \in R \iff \exists T(T \in \mathcal{P} \wedge b \in T))$$

Theorem 34. *(Powerset) Stel* $a : X, P, Q : \Omega^X, \mathcal{P} : \Omega^{\Omega^A}$ *variabelen, dan:*

$$\models \forall P \exists \mathcal{P} \forall Q(Q \in \mathcal{P} \iff Q \subset P)$$

met $Q \subset P \iff \forall x(x \in Q \implies x \in P)$

3.7 Oneindigheids axioma

Definition 47. *Een natuurlijk getal object (n.n.o) in* $\mathcal{E}$ *is een tripel* $(\mathbb{N}, 0, s)$ *bestaande uit een object* $\mathbb{N} \in Ob(\mathcal{E})$*, morfismen* $0 : \mathbf{1} \to \mathbb{N}, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *in* $\mathcal{E}$ *zodat als* (M, m, σ) *ook zo'n tripel is, dan is er een unieke factorisatie* $\mu : \mathbb{N} \to M$ *zodat:*

- $\mu \circ 0 = m$
- $\mu \circ s = \sigma \circ \mu$

We noemen $\mathbb{N}$ *nul en* s *de succesor afbeelding.*

Theorem 35. *Een natuurlijk getal object is uniek (op isomorfisme na)*

Example 5. *In* $[Sets]$ *is het n.n.o.* $(\mathbb{N}, 0, s)$ *gegeven door:*

- $\mathbb{N}$*, de natuurlijke getallen*
- $0 : \mathbf{1} \to \mathbb{N} : n \mapsto 0$
- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$

De reden waarom we dit soort object nodig hebben is vanwege het oneindigsheid axioma, deze zegt dat er een oneindige verzameling is. Dit axioma is in het algemeen niet geldig in een topos, maar als er een n.n.o. aanwezig is, dan zal dit axioma hieruit volgen:

Theorem 36. *Stel* $\mathcal{E}$ *een topos met natuurlijk getal object, dan geldt het oneindigsheidsaxioma in* $\mathcal{E}$*.*

3.8 Keuzeaxioma

Er zijn verschillende karakterisaties van het keuzeaxioma, we geven er 2:

- Het (cartesisch) product van niet lege verzamelingen is niet leeg.
- Elke surjectieve afbeelding heeft een rechtsinverse.

Als we deze eigenschappen veralgemenen in termen van categorieën hebben we:

- Het product van niet initiale objecten is opnieuw geen initiaal object.
- Elk epimorfisme $f : X \to Y$ heeft een sectie, dit is een morfisme $g : Y \to X$ zodat $f \circ g = 1_Y$.

Aangezien dat een topos niet (noodzakelijk) uit verzamelingen bestaat, is het niet voldoende om enkel een topos (of categorie) te construeren zodat deze eigenschappen falen. Hierdoor noemen we dit het externe keuzeaxioma. Om de onafhankelijkheid van het (verzameling-theoretische) keuzeaxioma aan te tonen, moeten we een topos construeren die niet voldoet aan het keuzeaxioma geschreven in in de interne logica:

Definition 48. *Het interne keuze axioma in een topos geldt als*

$$\models \forall f \in Y^X : \left[(\forall y \exists x : f(x) = y) \implies \exists s \in X^Y : \forall y : f(s(y)) = y\right]$$

Volgende stelling geeft een karakterisatie van het interne keuzeaxioma:

Theorem 37. *Een topos $\mathcal{E}$ voldoet aan IAC als en slechts, voor elk object $E \in Obj(\mathcal{E})$, de exponentiele functor*

$$(-)^E : \mathcal{E} \to \mathcal{E},$$

epimorfismen bewaart.

Het bewijs hiervan is terug te vinden in [6]. In het bewijs wordt er gebruikt gemaakt van volgende gelijkheid (als deelobjecten):

$$Epi(X, Y) = \{f \in Y^X | \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y\}.$$

We zien dus dat de interne logica ook bepaalde objecten mooi kan definiëren (of karakteriseren). Het object $Epi(X, Y)$ hebben we in deze thesis niet beschreven, maar dit object representeert dus de epis tussen X en Y. Meerdere voorbeelden van het gebruik van de interne logica is te vinden in volgende sectie:

3.9 Structuur van een topos in de interne taal

We hebben nu een taal geassocieerd aan elke topos, hoe deze wordt geïnterpreteerd hangt af van de eigenschappen van de topos, we kunnen dus ook eigenschappen van de topos bewijzen d.m.v. de interne taal. In deze sectie geven we (zonder bewijs) een aantal resultaten. Stel $\mathcal{E}$ een topos en $A, A_1, A_2, B \in Obj(\mathcal{E})$ objecten hierin.

Theorem 38. *Stel $f, g : A \to B, a, a' : A, b : B$, dan gelden:*

- $f = g \iff \models \forall a : f(a) = g(a)$.
- f *monomorfisme* $\iff \forall a \forall a'(f(a) = f(a') \implies a = a')$.
- f *epimorfisme* $\iff \models \forall b \exists a : f(a) = b$.
- $A_1 \subseteq A_2 \iff \models \forall a(a \in A_1 \implies a \in A_2)$.
- $0 = \{a|false\}$.
- $1 = \{a|true\}$.
- $A_1 \cap A_2 = \{a|(a \in A_1) \wedge (a \in A_2)\}$.
- $Im(f) = \{b|\exists a : f(a) = b\}$.
- $\models a \in \{b\} \iff a = b$.

We zien dus dat de eigenschappen zich vertalen zoals in het geval van $[Sets]$. En zo zijn er nog vele andere verzamelingen die m.b.v. de taal kunnen worden geformuleerd, eigenschappen die zo kunnen worden geformuleerd en veel meer. Aangezien vele wiskundige structuren worden gedefinieerd a.d.h.v. verzamelingen (en functies wat ook strikt genomen verzamelingen zijn), kunnen we dus ook structuren definiëren in de taal analoog zoals we dit in sets hebben gedaan, zo is in het boek [2] een poset (opnieuw) gedefinieerd en zijn hier ook bepaalde eigenschappen bewezen zoals dat het supremum uniek is in een poset. In dit boek zijn ook de bewijzen van voorgaande eigenschappen gegeven.

Chapter 4

Conclusion

In deze thesis hebben we een algemenere *foundation* van wiskunde geintroduceerd en hebben we een connectie gezien tussen de 3 pilaren van de wiskunde: verzamelingenleer, categorie theorie en (zelfs) type theorie. Dit hebben we gedaan als volgt:
Aan elke categorie hebben we een type theorie geconstrueerd, genaamd de interne taal. Dan zijn we van type theorie naar verzamelingen theorie gegaan door te tonen dat de interne taal van een topos een model is voor Zermelo-Fraenkel verzamelingen theorie.

Chapter 5

Appendix: Ordertheoretische Heyting algebras

Een tralie een poset is waarop het supremum en infimum gedefinieerd is:

Definition 49. *Een tralie* $(L, \wedge, \vee)$ *is een verzameling* L *met daarop binaire operaties* $\wedge, \vee : L \times L \to L$ *zodat:*

- $x \vee x = x = x \wedge x$
- $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$

Merk op dat elke tralie een poset is door $x \leq y \iff x = x \wedge y$ *te stellen.*

Een tralie met $0, 1$ is een tralie met elementen $0, 1$ zodat $1 \wedge x = x$ en $0 \vee x = x$.

Definition 50. *Een tralie* L *heet distributief als*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

geldt voor $x, y, z \in L$

Definition 51. *Een boolse algebra* B *is een distributieve tralie* B *met* $0, 1$ *zodat elk element het complement* $\neg x$ *heeft, i.e.*

$$x \wedge \neg x = 0, \quad x \vee \neg x = 1.$$

Merk op dat wegens de distributiviteit het complement uniek is.

Een speciaal soort tralie is een Heyting-algebra waarbij we elke 2 elementen door een element kunnen vergelijken m.b.v. het infimum:

Definition 52. *Een Heyting Algebra H is een tralie met 0 en 1 samen met een de operatie y^x voor $x, y \in H$ zodat*

$$z \leq y^x \iff z \wedge x \leq y \quad \forall z \in H.$$

Voor redenen die duidelijk zullen worden wordt het element y^x ook geschreven als $x \implies y$. Het element y^x noemt men de exponentieel van y met x.

Het element y^x is dus het supremum van de verzameling $\{z \in L | z \wedge x \leq y\}$.

Theorem 39. *Stel B een boolse algebra, dan is $(\neg x \vee y)$ een exponentieel y^x*

Merk op dat dit een natuurlijke keuze is, want in (propositie) logica kunnen we $p \implies q$ definiëren als $\neg p \vee q$.

Corollary 2. *Elke boolse algebra is een Heyting algebra.*

Ondanks dat niet elke Heyting algebra een boolse algebra is, kunnen we wel een semi-complement van een element definiëren als $\neg x = x \implies 0$, deze voldoet dan aan $x \wedge \neg x = 0$ en onder sommige condities levert dit wel een boolse algebra:

Theorem 40. *Stel H een Heyting algebra, dan geldt:*

$$H \textit{ bools} \iff \neg\neg x = x \iff x \vee \neg x = 1$$

Bibliography

[1] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic category theory*. Vol. Encyclopedia of mathematics and its applicaties. Cambridge University Press, 1994.

[2] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves*. Vol. Encyclopedia of mathematics and its applicaties 52. Cambridge University Press, 2004.

[3] Colin McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford University Press, 2005.

[4] Andrew M. Pitts. *Categorical Logic*. Oxford University Press, 1995.

[5] Vaughan Pratt. *Algebras for Logic*. 2003.

[6] Ieke Moerdijk Saunders Mac Lane. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Vol. Universitext. Springer-Verlag, 1992.

[7] *Semantics of intuitionistic propositional logic*. `http://www2.math.uu.se/~palmgren/tillog/heyting3.pdf`. Accessed: 13/06/2019.